SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. X. — (Anno LXXIX)

29 ottobre 1939 — 28 ottobre 1940 - XVIII

NAPOLI
STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE
Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 24.566
1940-XVIII

Pubblicato il dì 6 dicembre 1940 - XIX

SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

RENDICONTO

DELL'ACCADEMIA

DELLE

SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE

SERIE IV. — VOL. X. — (Anno LXXIX)

29 ottobre 1939 — 28 ottobre 1940 - XVIII

NAPOLI

STABILIMENTO TIPOGRAFICO G. GENOVESE

Pallonetto S. Chiara, 22 - Telef. 24.566

1940-XVIII

RELAZIONE

SUI LAVORI COMPIUTI DALLA R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE FISICHE E MATEMATICHE DELLA SOCIETÀ REALE DI NAPOLI

DURANTE L'ANNO 1938-39 (XVII)

letta nell' adunanza del dì 13 gennaio 1940 (XVIII)

dal socio segretario **Geremia D' Erasmo**

Soffermandoci a considerare brevemente, in questa consueta rassegna dell' attività annuale del nostro Sodalizio, quanto di più notevole ebbe a verificarsi nel 1938-39, è per noi motivo di soddisfazione constatare come l'Accademia di Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli abbia continuato a svolgere, con l' abituale attività, il còmpito al quale attende da più di due secoli di sua vita gloriosa. Ne fanno fede il nuovo volume del Rendiconto (nono della quarta serie), che comprende 22 note di soci e di estranei, con 14 tavole e numerose figure intercalate, e le nuove memorie accolte per la stampa negli Atti accademici, di cui per la munifica larghezza della benemerita direzione generale del Banco di Napoli sta per essere ultimato un grosso volume.

Riferendoci dapprima, in questa nostra rassegna, alle ricerche astronomiche, possiamo citare il lavoro del consocio CARNERA, che, in collaborazione col dott. VOCCA, ha esposto i risultati delle osservazioni di latitudine eseguite nel 1938 dalle otto Stazioni internazionali, in modo analogo a quanto era stato fatto negli anni precedenti. Da tali osservazioni, opportunamente calcolate, è stato possibile trarre le coordinate istantanee del Polo e la conseguente traiettoria, conservando ancora due distinte deduzioni, basate l' una sui soli risultati delle stazioni boreali, e l' altra su quelli delle stazioni boreali ed australi.

Nel campo della scienza delle costruzioni è anzitutto da ricordare una nota del consocio RICCI, che, proseguendo le sue ricerche relative allo *Studio statico dei cilindri elastici soggetti a flessione composta*, ha esposto alcune trasformazioni di integrali di area che compaiono in un suo precedente lavoro, ottenendo alcune notevoli identità e verifiche. Di solidi a grande curvatura sollecitati a torsione e taglio si è particolarmente occupato il prof. Franco JOSSA, il quale in una nota ha mostrato come il problema possa risolversi in modo analogo a quello di SAINT-VENANT, tenendo conto

della diversità degli scorrimenti prodotti da sollecitazioni tangenziali. Di interessanti *Esperimenti di usura per abrasione su «scarpe» di legno per funi portanti di funivie* ha dato notizia l'ing. Camillo Zocchi, il quale, in considerazione del notevole vantaggio economico rappresentato dalla possibilità di ridurre l'usura che le funi portanti delle funivie subiscono scorrendo sulle relative «scarpe» di appoggio, attualmente costituite di metallo, ha iniziato, con un dispositivo sperimentale imitante le reali condizioni di lavoro, la determinazione della resistenza all'usura del legno nella costituzione di tali «scarpe». I risultati preliminari da lui ottenuti confermano la possibilità di adottare tale materiale in luogo del metallo nella costituzione delle «scarpe», dato il limitato consumo che esso subisce e quello, trascurabile, che determina nella fune.

Fra i nuovi contributi, riflettenti le matematiche pure, devo ora ricordare, in ordine cronologico, una nota del prof. Tullio Viola, il quale, continuando le sue ricerche *Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali* già pubblicate nel precedente volume del nostro Rendiconto, ha dimostrato che condizioni necessarie e sufficienti affinchè le radici di un'equazione algebrica a coefficienti reali abbiano tutte parti reali esterne o non interne a un determinato intervallo, sono che certi polinomi siano definiti (semi-definiti) positivi sull'intero asse reale. Successivamente, è da menzionare un lavoro del prof. Federico Amodeo, che riprendendo dopo lungo intervallo alcune sue antiche ricerche riflettenti la *Geometria delle serie lineari delle curve algebriche* e partendo dalle curve di genere massimo per arrivare a quelle di genere minore fino alle curve ellittiche e alle razionali, sceglie un nuovo metodo che permette, nello studio di tutti i sistemi di tutte le curve aggiunte alla curva fondamentale, di pervenire con estrema facilità a teoremi faticosamente conquistati, evitando una quantità di lemmi e teoremi di ripiego. In tal modo la teoria delle serie lineari, nata dagli *integrali abeliani* e dalle *superficie di* Riemann, non ha quasi più bisogno di elevate teorie analitiche, e si potrebbe riattaccarla direttamente alla *teoria generale delle curve piane di* Cremona.

Una dimostrazione della validità del teorema fondamentale per le *algebre complesse commutative irriducibili del 4.° ordine dotate di modulo* è stata fornita, in una nota, dalla dott. Clelia Guarnaccia, che ha colto l'occasione per determinare la particolare forma che assumono, in queste algebre, le serie di potenze rappresentanti le funzioni: sen x, cos x ed e^x.

In un'altra nota, il dott. Savino Coronato, partendo dai noti *Teoremi di confronto per equazioni differenziali lineari del secondo ordine*, ne dimostra, mediante un'opportuna trasformazione, l'origine comune, e contemporaneamente mette in rilievo la possibilità di dedurne altri, precisandone due.

È dovuta, poi, al prof. Mario Giovanardi una nota, nella quale vengono esposti dei modi abbastanza semplici per rappresentare la *prospettiva*

(*conica e cilindrica*) *delle superficie di rotazione*, determinando all' uopo le proiezioni ortogonali sopra un piano orizzontale e le altezze rispetto al piano stesso dei singoli punti appartenenti alle curve di contatto dei coni e dei cilindri circoscritti alle superficie medesime.

Riprendendo e proseguendo alcune sue precedenti ricerche, il socio ANDREOLI, in una nota *Sulla convergenza delle serie ed i suoi caratteri gruppali* (*convergenza assoluta, incondizionata, totale*), ha, infine, mostrato come una teoria completa delle serie deve di necessità avere un indirizzo gruppale.

In un diverso campo di indagini, lo stesso ANDREOLI ha preso in esame una fondamentale questione statistica, inerente, ad esempio, al calcolo dell' incremento demografico o alla costruzione delle tavole di mortalità, dimostrando come essa risulti collegata ad un concetto nuovo del calcolo delle probabilità: quello delle *variabili mutuamente casuali*.

È da ricordare ancora una nota del prof. Luigi LORDI *Sulla decomposizione del premio nell'assicurazione vita*, in cui l' autore, riferendosi ad una assicurazione mista generale, trasforma l'equazione che, per il principio di equivalenza, verifica il premio, mostrando come la sua risoluzione possa ricondursi a quella di una equazione dello stesso tipo, ma che traduce un problema di pura capitalizzazione, e di una equazione integrale di VOLTERRA di seconda specie che, per la forma particolare del nucleo, si riduce ad una equazione differenziale lineare. Tali trasformazioni dell' equazione del premio portano a stabilire direttamente le componenti di risparmio e di rischio, senza fare uso di altri concetti attuariali.

Passando alle scienze fisiche, é anzitutto da segnalare una nota del socio CARRELLI *Sulle proprietà ottiche dei metalli*, nella quale viene calcolato il potere riflettente dei metalli in funzione della lunghezza d' onda, in base alla moderna teoria elettronica, e si mostra com' esso non sia in accordo con i dati sperimentali conosciuti, indicando la probabile interpretazione delle diversità riscontrate. E, nello stesso campo di indagini, un allievo del CARRELLI, il dott. CENNAMO, ha determinato sperimentalmente le *Variazioni del potere assorbente del Nichel con la temperatura*, stabilendo le deviazioni effettive rispetto alle previsioni teoriche e rilevando come l' andamento del potere assorbente di questo metallo sia analogo a quello riscontrato da altri autori per il tungsteno.

Di notevole interesse, non soltanto teorico ma altresì per la pratica applicazione, si è rivelato un metodo di *misura delle correnti disperse* da una membratura metallica, esposto in una nota del socio corrispondente FOCACCIA e dell' ing. M. JACOPETTI, con particolare riferimento alle reti di strutture sotterranee e alle reti di binari. Il metodo si è infatti rivelato capace di fornire utili indicazioni, non solo perchè consente la misura di un parametro fino ad oggi poco controllato, ma anche perchè permette di

mettere in evidenza, in casi particolari, anomalie dipendenti da fenomeni di scambio, che diversamente non si sarebbero potute controllare.

Ed al più vasto orizzonte delle applicazioni pratiche si riferiscono ancora altre note, ugualmente inserite nel nostro Rendiconto, le quali provano come la scienza possa felicemente collaborare con la tecnica e con l'industria per portare nuovi e più cospicui contributi alla soluzione di problemi interessanti l'economia autarchica del paese. Così, nel campo relativo ai materiali da costruzione, il socio Ricci ha dato notizia di alcuni gruppi di esperimenti relativi a speciali ferri per cemento armato, costituiti da due tondini attorcigliati (ferri *Isteg*), relativi alle proprietà meccaniche di calcestruzzi cementizi preparati con pietrischi locali e con varie assegnate dosature, e relativi ancora alla possibilità di costruire travi in cemento armato, sostituendo al ferro canne di bambù. Fra le ricerche di chimica industriale, si può segnalare la nota del consocio Malquori e dell'ing. Giannone, relativa all'*esame delle materie prime da destinarsi alla produzione di refrattari silicei.* Richiedendosi a tali materiali, oltre che un'appropriata refrattarietà, una buona trasformabilità nel decorso della cottura, è importante conoscere i fattori che influiscono sulla velocità di conversione del quarzo nelle forme a più basso peso specifico (cristobalite, tridimite): fattori, che vengono presi in esame per vari campioni di rocce silicee specialmente di provenienza nazionale, mentre la trasformabilità di queste viene rilevata a mezzo di curve termo-dilatometriche ricavate mediante un apparecchio di precisione, cuocendo i vari materiali a temperatura e per tempi stabiliti. All'ing. Giannone è poi dovuta una nota *Sulla magnesite dell'isola d'Elba*, in cui vengono esposti i risultati delle indagini termiche e röntgenografiche su questo materiale, le quali confermano che la silice, che vi è contenuta in percentuale cospicua, è prevalentemente libera e amorfa (opale).

Fra le più interessanti comunicazioni verbali fatte da colleghi per dar notizia delle ricerche in corso e dei risultati da essi finora raggiunti, mi piace di ricordare anzitutto quella del socio Pierantoni sopra l'azione della luce visibile di bassa intensità e di ben controllata lunghezza d'onda sullo sviluppo di alcuni animali. Egli ha potuto dimostrare, che le luci artificiali tendono in generale ad accelerare lo sviluppo, ma che particolarmente acceleratrice si è dimostrata quella indaco-violetta, mentre sfavorevolmente possono agire, per determinati generi, quella azzurra, o la rossa, o la verde. In generale, le luci più sfavorevoli allo sviluppo sono rifuggite dagli animali adulti. Il risultato, già molto importante per il fatto che alcune specie accelerano il loro sviluppo fino a ridurne il periodo alla metà, lascia intravedere la possibilità di più vaste e pratiche applicazioni, sperimentando con insetti industriali.

Anche il socio Mario Pascal ha voluto ricordare i suoi studi sopra il problema delle rotazioni permanenti di un girostato intorno ad un punto fisso,

problema iniziato dal VOLTERRA e proseguito dal LAZZARINO nel solo caso del moto spontaneo. Considerando un girostato pesante con un punto fisso in cui il moto della parte mobile non è assegnato, egli ha trovato che sono dinamicamente possibili rotazioni permanenti del girostato intorno a quattro rette, intersezioni di due dei piani principali d'inerzia relativi al punto fisso con un cono avente il vertice nel punto fisso, qualora una di tali rette sia posta verticalmente. Risultano allora permanenti tanto la rotazione del girostato quanto quella della parte mobile, di guisa che il moto risulta essere una precessione regolare.

Dando ora breve notizia delle nuove memorie recentemente accolte per la stampa del volume degli Atti, ricordo quella del socio CARNERA, riguardante le *Ricerche sulle variazioni della latitudine osservate nella Stazione di Batavia*: memoria, che ha permesso di rettificare le latitudini dedotte fin dal 1931 in quella stazione internazionale, e di discutere il valore della latitudine media, con la eliminazione dell'effetto, che su quella località deve aver prodotto il movimento del polo. Si è potuto altresì mettere in luce l'esistenza di una variazione, probabilmente locale e forse dovuta a fenomeno atmosferico refrazionale, e di un'altra, variabile periodicamente nel corso dell' anno.

Al socio Giuseppe CHECCHIA-RISPOLI è dovuta una memoria *Su alcuni clipeastri miocenici della Calabria*, appendice alla monografia, che sul medesimo argomento l' autore aveva pubblicata nel 1925. Studiando nuovo materiale paleontologico recentemente avuto in esame, egli ha potuto fare importanti aggiunte a quella ricchissima fauna echinologica, completando la descrizione di forme già note ed illustrando per la prima volta specie finora non rinvenute nel miocene calabrese o del tutto nuove per la scienza.

Mentre con un senso di compiacimento rileviamo i nuovi contributi offerti dal nostro Sodalizio al progresso dell' alta cultura italiana, ci sentiamo stretti da indicibile pena, allorchè rivolgiamo il pensiero ai nuovi lutti, che ci hanno colpiti.

Quattro, e particolarmente dolorose, sono state le perdite di soci subìte dalla nostra Accademia durante l'anno scorso.

Il 15 gennaio 1939 cessava di vivere in Busto Arsizio, nella tarda età di 84 anni, Carlo Fabrizio PARONA, professore emerito di geologia nell' Università di Torino e decano dei nostri corrispondenti nella Sezione di Scienze naturali, a cui apparteneva fin dal dì 11 febbraio 1905. Geologo di chiara e meritata fama, paleontologo di indiscusso e riconosciuto valore, specialista sperimentato sopratutto nel campo delle Rudiste, maestro impareggiabile, cittadino esemplare, tenne con sommo onore per un quarantennio, dal 1890 al 1930, la cattedra di geologia nell' Università di Torino ed educò

alla ricerca scientifica una numerosa schiera di allievi, che, sparsasi poi in tutta l'Italia, lo considerò sempre come venerato Padre spirituale.

Dei principali risultati della sua indefessa opera di studioso — durata per sessanta anni e dimostrata da più di duecento note e memorie abbraccianti i più svariati campi delle discipline geo-paleontologiche — e delle sue precipue doti di cittadino e di insegnante trattò già il consocio D'Erasmo, in una commemorazione, che venne inserita nel Rendiconto.

Pochi giorni dopo, il 19 gennaio 1939, si spegneva a Comblain-au-Pont (Belgio), quasi novantenne, Giuseppe Cesàro, emerito di Mineralogia nell'Università di Liegi e nostro socio ordinario, nella sezione di Scienze naturali, dal dì 11 novembre 1916. Fratello del nostro compianto collega Ernesto, era nato a Napoli il 7 settembre 1849, ed aveva svolta una lunga e feconda attività didattica ed una varia e vasta attività scientifica principalmente nel Belgio, ed anche in Inghilterra, avendo insegnato a Cambridge durante gli anni della guerra mondiale. I suoi numerosi lavori, pubblicati a partire dal 1883 in vari periodici o atti accademici, specialmente in quelli di Bruxelles e di Liegi e nel Bollettino della Società Francese di Mineralogia, riguardano tutti i rami della mineralogia e anche delle scienze affini. Trattò più particolarmente di cristallografia teoretica e pratica, della riproduzione artificiale dei minerali e dell'alterazione di molti di essi, ed anche di fisica mineralogica, specialmente di ottica dei cristalli, esponendo, fra l'altro, un metodo per determinare l'indice di rifrazione senza ricorrere alla minima deviazione. Rimasto sempre spiritualmente legato all' Italia e specialmente alla nativa Napoli, aveva partecipato alle feste per il settimo centenario del nostro Ateneo nel 1924, rivolgendo un indirizzo in nome del Governo Belga, dell'Accademia Reale e delle diverse Università del Belgio, ed aveva consacrato i suoi ultimi studi a minuziose ricerche sopra le forme, le costanti ottiche e la composizione chimica dei cristalli microscopici dei minerali del Somma-Vesuvio.

Ricordandone brevemente le principali benemerenze, sia nel campo scientifico che in quello didattico, il nostro Presidente aveva, nell'adunanza del 2 febbraio 1939, pregato il socio Quercigh di tenere, in altra tornata, una commemorazione di Giuseppe Cesàro.

Nessuno di noi poteva allora prevedere che Emanuele Quercigh, l'altro mineralista tanto caro a noi tutti e così assiduo alle nostre riunioni, a meno di tre mesi, il 21 aprile scorso, l'avrebbe seguìto nella tomba, immaturamente stroncato, a 54 anni, nella pienezza di una maturità, che avrebbe potuto dare ancora cospicui frutti, sia nell'investigazione scientifica che nell'insegnamento.

Socio corrispondente dal 14 maggio 1932 e ordinario dal dì 15 novembre 1938, egli aveva già pubblicato nel nostro Rendiconto qualche nota giovanile, e, negli Atti, un'importante memoria sulla diffusione tra cristalli allo stato solido a temperatura ordinaria e sua importanza nella

minerogenesi; ma per noi il nome di Quercigh resta sopratutto legato a quello del suo indimenticabile maestro, Ferruccio Zambonini, del quale Egli volle, accogliendo il nostro invito, preparare una seconda edizione dell'importantissima opera sulla *Mineralogia Vesuviana*, pubblicata, in apposito grosso volume di appendice ai nostri Atti, nel 1935. Il grande amore, col quale Quercigh attese a questa lunga fatica, e il suo proposito di continuare le ricerche dei predecessori in quell'inesauribile e sempre attiva fucina mineraria vesuviana, riserbando al nostro Sodalizio (come aveva fatto in questi ultimi anni) la pubblicazione dei risultati ottenuti, ce ne renderanno senza dubbio ancor più vivo e caro il ricordo.

L'opera di severo e coscienzioso ricercatore e di efficace ed appassionato insegnante, svolta dal nostro compianto collega nella sua breve ma luminosa carriera, venne rapidamente tratteggiata da chi vi parla in un cenno commemorativo, già stampato nel Rendiconto.

Non avrà, invece, per sua precisa volontà, una pagina di mesta ricordanza e neppure una riproduzione della sua nobile e ieratica figura, l'altro nostro consocio, immaturamente e quasi improvvisamente scomparso in Roma il 6 agosto 1939: Gaetano Scorza, ordinario nella Sezione di Scienze matematiche dal 14 febbraio 1931. La sua ritrosia a mettersi in mostra ed il suo disprezzo per ogni manifestazione di piccole vanità umane possono senza dubbio giustificare il silenzio, con cui Egli ha voluto che fosse accompagnata la sua fine; ma colui che vi parla, e che avendolo avuto a lungo vicino come presidente di questa Accademia o della intera Società Reale di Napoli seppe meglio apprezzarne l'integrità del carattere, la grande capacità di lavoro, l'assoluta dedizione al dovere, lo sconfinato amore per la ricerca scientifica, sente oggi di non contravvenire alla volontà dell'estinto con questo fugace e disadorno cenno, che si limita ad esprimere il profondo e sentito compianto dei colleghi tutti per la perdita di un uomo, che con la sua spiccata personalità seppe vivere in pieno la vita dello spirito, insegnando, educando, costruendo con originalità e profondità la sua opera scientifica nei vari campi della geometria analitica, proiettiva e descrittiva.

Scomparsi gli uomini, restano — monumento duraturo ed eloquente — le opere dell'ingegno, ad attestare nel tempo le doti dei Colleghi che ci furono cari e alla cui venerata memoria mandiamo oggi il doveroso omaggio del nostro mesto e sempre vivo rimpianto.

Sull' impiego della termobilancia a registrazione continua, nello studio della disidratazione termica di composti solidi idrati

Nota del Dott. **Vittorio Cirilli**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 11 novembre 1939 - XVIII)

Sunto. — L' autore descrive un apparecchio capace di tracciare in maniera continua ed automaticamente le curve perdita di peso-temperatura ed illustra alcuni dei risultati ricavati mediante lo studio della demolizione termica di composti solidi idrati.

Ha potuto, tra l' altro, osservare che nella disidratazione dell' alluminato tricalcico esagonale con $\sim$ 10 Mol. H_2O prendono origine gli idrati con 8, 6, 3 Mol. H_2O e che l' esaidrato esagonale ha un comportamento termico differente da quello dell' esaidrato cubico.

Nello studio della disidratazione termica delle sostanze idrate si prospetta sovente l' utilità di esaminare l' andamento del fenomeno seguendo in modo continuo le variazioni di peso dovute alla dipartita dell' acqua, in funzione della temperatura.

Dovendo pertanto, a complemento di ricerche in corso presso questo Istituto, definire il comportamento termico di una serie di idrati di alluminati e di ferriti di calcio, nonchè degli idrati dei sali che detti alluminati e ferriti formano con differenti sali di calcio, mi si è reso necessario mettere a punto un apparecchio con il quale fosse possibile di registrare con buona precisione le curve: perdita di peso — temperatura.

Ho adottato un dispositivo già segnalato da altri sperimentatori [1]), che è basato sostanzialmente sulla composizione delle rotazioni di due specchi uno dei quali è solidale con l'equipaggio mobile di un galvanometro, l'altro con il giogo di una bilancia.

L'apparecchio è stato realizzato nella maniera seguente: (Tav. I).

Un sottile fascio di raggi luminosi paralleli viene inviato sullo specchio del galvanometro a cui è collegata la coppia termoelettrica; da qui è riflesso sullo specchio unito alla bilancia, ad un braccio della quale è appeso, mediante un sottile filo di platino, un piccolo crogiolo contenente la

---

[1]) Montemartini e Losana, Gazz. Chim. Ital. *53*; 91; (1923). — Mazzetti. Rend. Acc. Lincei *33*; 46; (1924)· — Guichard, Bull· Soc. Chim. *37*; 251; (1925). Hackspill e Stempfel. Chim. Ind. 1929 n° spec. pag. 151. — Lefol. *Sur l' hydratation des aluminates, des sels doubles, du silicate et du sulfate de calcium,* Sens. (1937). — Longchambon. Bull. Soc. Française de mineralogie *59*; 145; (1936).

sostanza in esame, da quest'ultimo specchio il raggio è poi rinviato ad una lastra fotografica.

Equilibrando opportunamente la bilancia ogni perdita di peso subita dalla sostanza si traduce in una rotazione dello specchio e quindi in una deviazione, in un piano verticale, del punto luminoso.

Il crogiolo è sospeso al centro di un fornetto elettrico, vicino all'estremità della termocoppia la quale, attraverso una resistenza, è collegata col galvanometro a specchio. Lo specchio ruotando con le variazioni della temperatura fa subire al raggio riflesso una deviazione in un piano orizzontale.

Dalla composizione delle due variazioni x e y del punto luminoso sulla lastra fotografica, resta tracciata la curva: perdita di peso — temperatura.

Lo smorzamento delle oscillazioni della bilancia è stato ottenuto collegando il braccio con un piattello di dimensioni oppositamente scelte che resta immerso in seno ad un liquido sufficientemente viscoso (olio di vaselina).

La sistemazione dei due specchi mi ha permesso di ottenere la perfetta proporzionalità degli spostamenti sia orizzontali sia verticali sul piano x y.

La rotazione completa dello specchio della bilancia (escursione totale del punto luminoso sull'asse delle ordinate) corrisponde ad una variazione di peso di gr. 0,060. La scala delle ascisse può esser variata a piacere inserendo una resistenza nel circuito: termocoppia — galvanometro.

Il forno è stato costruito appositamente per modo che la zona centrale fosse abbastanza ampia per comprendere lo spostamento verticale del crogiolo. Una seconda termocoppia indipendente permette inoltre di controllare la temperatura della zona centrale durante il decorso dell'esperienza.

Ho mantenuto la velocità di salita della temperatura il più possibile uniforme. (1° oppure 2° al 1').

Con l'ausilio della termobilancia descritta più sopra ho tracciato la curva di disidratazione termica di alcune sostanze idrate, raccogliendo dei risultati che mi sono apparsi utili alla interpretazione del processo della loro demolizione.

Di ciò dò conto nel corso della Nota, riproducendo, nelle tavole che seguono, la documentazione fotografica originale.

a) *disidratazione del gesso.*

La curva di disidratazione è indicata nella Tav. 2.

Si osserva una rapida eliminazione di acqua verso i 120°, a seguito di che viene raggiunta la composizione corrispondente al semidrato.

A circa 165° è nettamente visibile un secondo debole arresto, e dall'esame del seguente tratto di curva, più marcato, si deve arguire che l'eliminazione dell'acqua dal semidrato avviene lentamente ed in maniera

graduale, in accordo questo, con il carattere zeolitico che alcuni Autori attribuiscono all'acqua contenuta in detto idrato [1]).

L' entità dell' arresto corrispondente a $CaSO_4$ 1/2 H_2O è piccola, e solo grazie alla sensibilità del dispositivo usato è stato possibile di poter individuare il fenomeno, non accusato da altri sperimentatori che hanno lavorato con apparecchi a registrazione discontinua e pertanto meno adatti a rilevare tutte le particolarità della curva di riscaldamento [2]).

b) *alluminato tricalcico.*

Sempre nella Tav. 2 è riprodotta la curva di disidratazione dell'alluminato cubico: 3 CaO. Al_2O_3. 6 H_2O,

Il contenuto di acqua del sale resta pressochè invariato fino a 260°÷270°, temperatura alla quale si osserva una brusca disidratazione che conduce all' idrato: 3 CaO. Al_2O_3. 1,5 H_2O [3]).

L' alluminato tricalcico esagonale: 3 CaO· Al_2O_3 $\sim$ 10 H_2O accusa sulla curva di disidratazione un primo arresto in corrispondenza dell' idrato: 3 CaO. Al_2O_3. 8 H_2O; un secondo arresto lo si osserva a 200°, e qui la composizione del solido corrisponde a: 3 CaO. Al_2O_3. 6 H_2O; infine ancora un ultimo arresto si nota a 300° in corrispondenza dell' idrato: 3 CaO. Al_3O_3. 3 H_2O.

La successione dei differenti idrati è così evidente che non vi possono essere dubbi di sorta sulla esistenza dei diversi stadi della disidratazione stessa. Resta così chiarito un fenomeno sull' interpretazione del quale i dati della letteratura non sono del tutto concordi [4]).

Per una migliore conoscenza del fenomeno ne ho seguito l'andamento anche osservando gli spettri Debye delle varie fasi che prendono origine durante la disidratazione.

Com è noto, l' alluminato tricalcico esagonale presenta uno spettro nettamente diverso ed alquanto meno nitido di quello dell'alluminato cubico esaidrato. Nello spettro della sostanza corrispondente al secondo arresto (a 200°) si possono osservare con certezza solamente le righe dell' alluminato cubico, ma dato che dette righe sono piuttosto deboli e che questa sostanza è facilmente identificabile anche in piccola quantità, si può concludere che l'idrato con 6 H_2O formatosi non è l'idrato cubico ma è probabilmente un idrato corrispondente alla forma esagonale che in piccola parte si è trasformato nella forma cubica, più stabile, per effetto del riscaldamento. Il fatto che non si osservino altre righe negli spettro-

---

[1]) Linck e Jung. Zeit. anorg. allg. Chem. *137*; 407; (1924) — Jung. Zeit. anorg. allg. Chem. *142*; 73; (1925).

[2]) Lefol, l. c.

[3]) Thorvaldson e Grace, Can. Journ. Res. 1; 36; (1929).

[4]) Bessey, *The calcium aluminate and silicate bydrates — Symposium on the Chemistry of Cemente* — Stoccolma 1938.

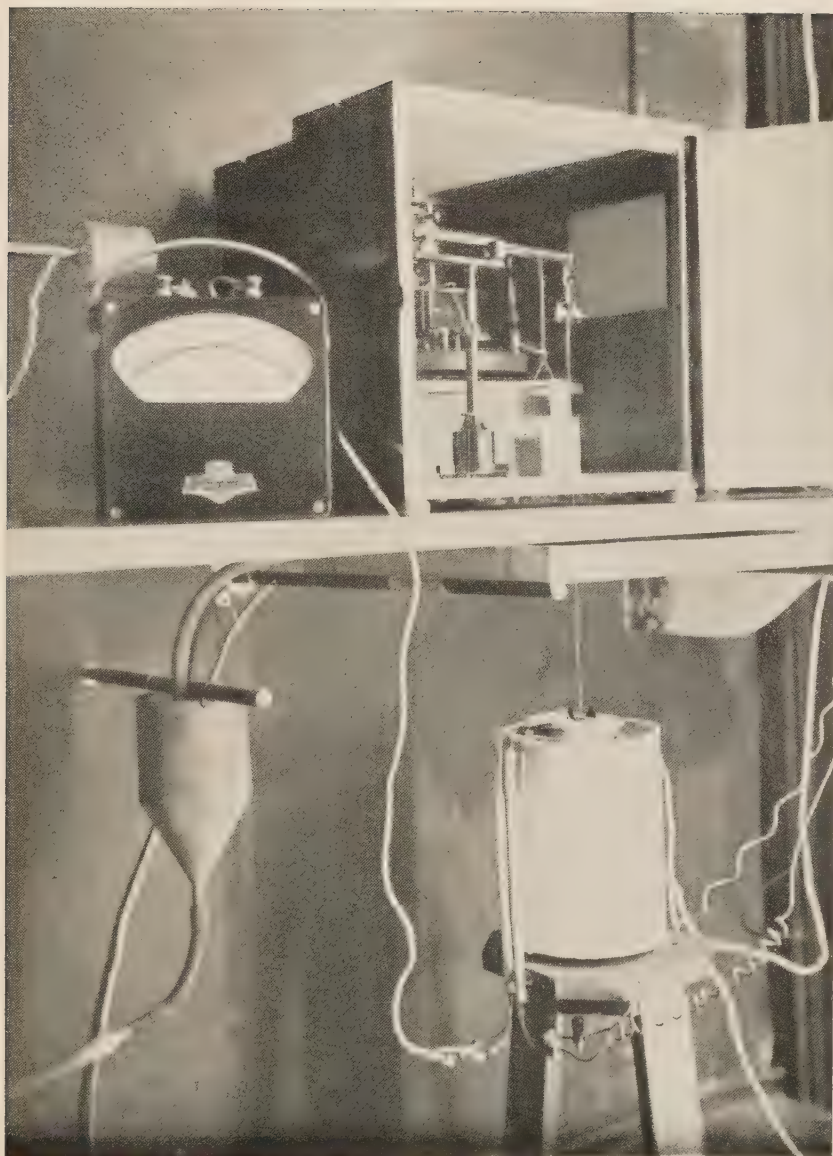
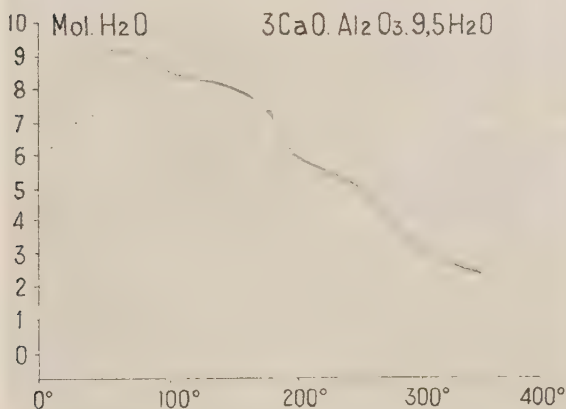
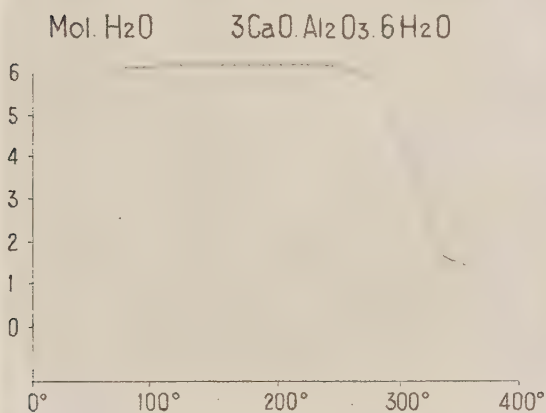
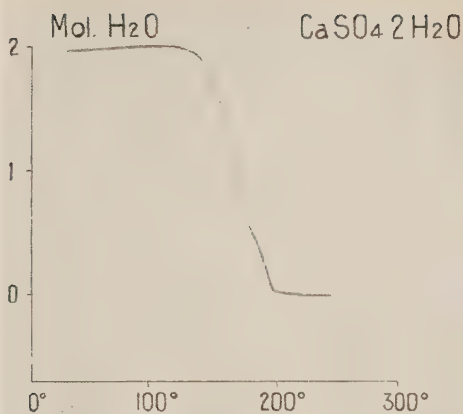
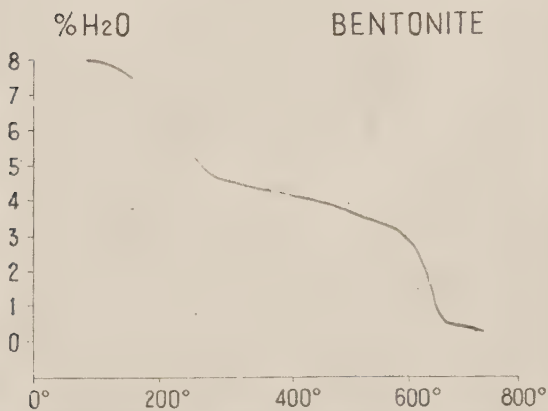
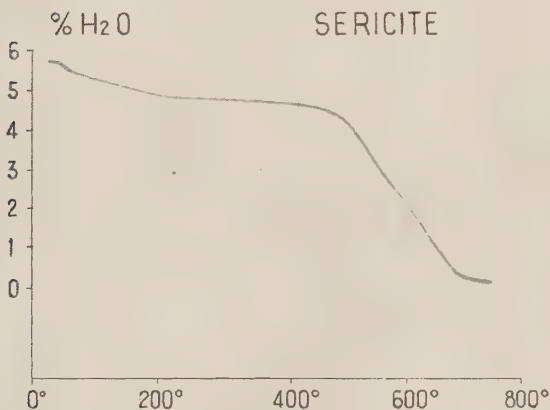
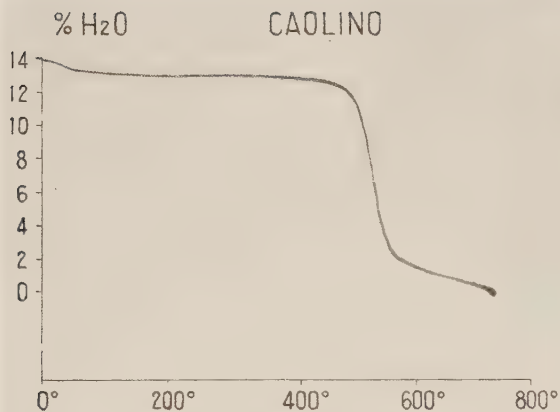
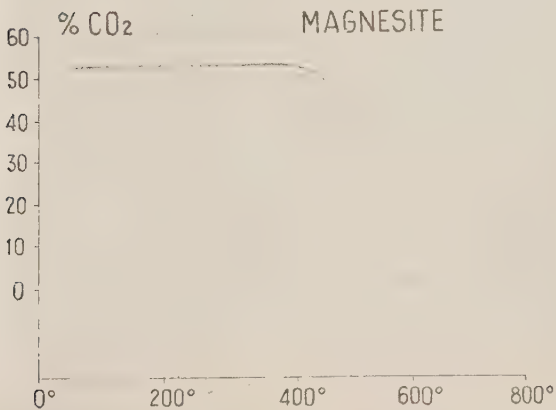
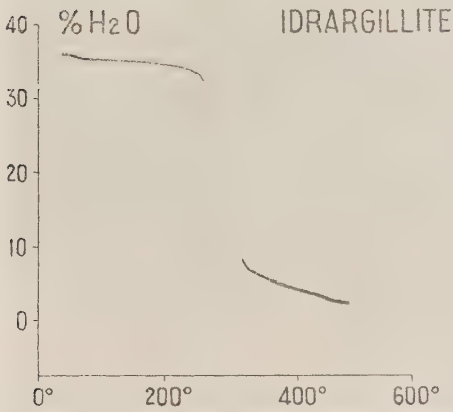
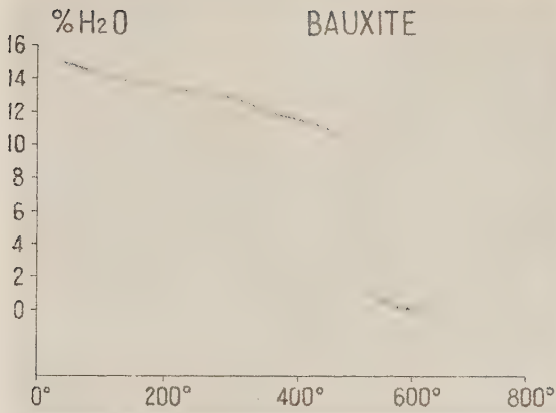
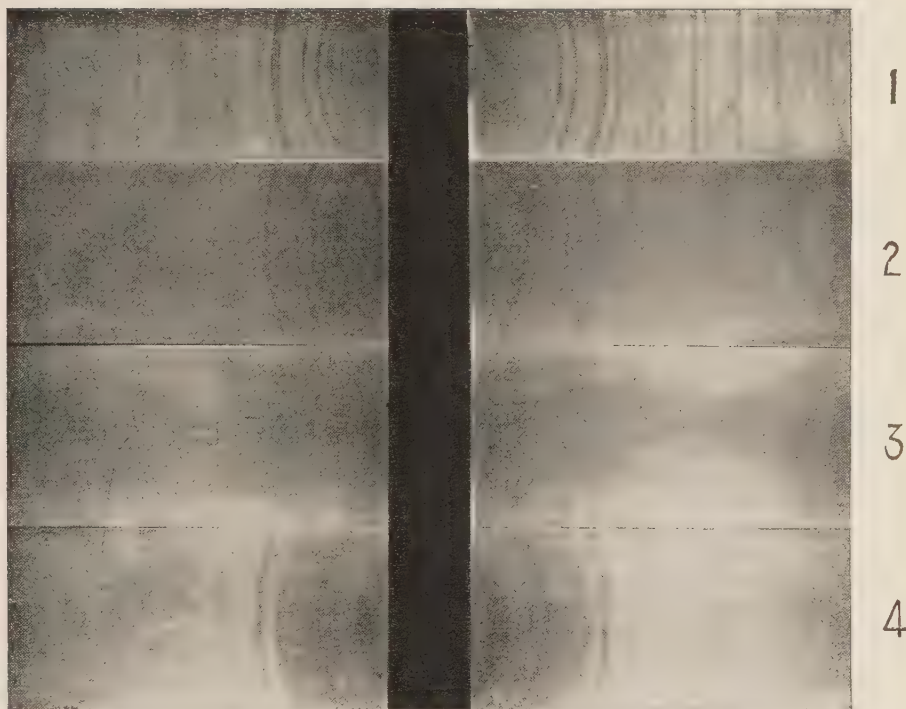
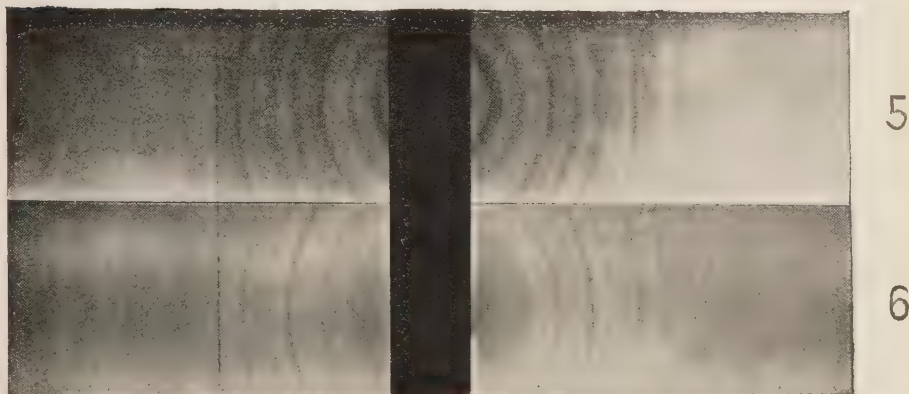
% H2O
CAOLINO
14
12
10
8
6
4
2
0
0°
200°
400°
600°
800°
% H2O
SERICITE
6
5
4
3
2
1
0
0°
200°
400°
600°
800°
% H2O
BENTONITE
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0°
200°
400°
600°
800°

% H2 O
BAUXITE
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0°
200°
400°
600°
800°
% H2 O
IDRARGILLITE
40
30
20
10
0
0°
200°
400°
600°
% CO2
MAGNESITE
60
50
40
30
20
10
0
0°
200°
400°
600°
800°

1

2

3

4

1) $3\,CaO.\ Al_2O_3.\ 6\,H_2O$ 2) $3\,CaO.\ Al_2O_3.\ 9{,}5\ H_2O$ dopo riscaldamento a 200°
3) $3\,CaO.\ Al_2O_3.\ 9{,}5\ H_2O$ dopo riscaldamento a 350° 4) $3\,CaO.\ Al_2O_3.\ 9;5\ H_2O$

5) idrargillite 6) bauxite

grammi si può interpretare ammettendo una parziale distruzione del reticolo cristallino causata dalla brusca eliminazione di una parte dell'acqua.

Il prodotto contenente circa 2 mol. di acqua, ottenuto per riscaldamento a 350°, si mostra pressochè amorfo ai raggi X.

Dato che a 300° sono ancora presenti tre molecole di acqua, si deve dedurre che l'idrato precedente, a $6H_2O$, non è l'alluminato cubico, perchè detto alluminato a 300° è totalmente trasformato nell' idrato più povero di acqua: Al_2O_3. 3 CaO. 1,5 H_2O.

c) *terre silico — alluminose*

Nella Tav. 3 sono riportate le curve di disidratazione di alcune terre silico-alluminose.

Per il caolino (caolino di Carlsbad) si osserva, accanto ad un piccolo effetto iniziale a bassa temperatura, la notevole perdita di peso tra 470° e 550° dovuta alla nota decomposizione della caolinite.

La curva di disidratazione di una sericite (terra bianca delle isole Pontine) è simile a quella precedente. Si osserva però, oltre una perdita di peso iniziale leggermente superiore, una maggiore lentezza nell' eliminazione dell'acqua di combinazione. Questa avviene infatti — per una velocità di riscaldamento uguale a quella con la quale è stata ricavata la curva precedente — nell'intervallo tra 470° e 670°.

Di aspetto nettamente diverso è la curva di disidratazione di un campione di bentonite (preventivamente seccata per lungo tempo su P_2O_5 nel vuoto — velocità di riscaldamento 120° ora).

La perdita di peso più notevole si osserva in questo caso a bassa temperatura, cioè nell'intervallo tra 100° e 260°. Dopo un' ulteriore graduale perdita di peso, si nota l'eliminazione dell'acqua reticolare ad una temperatura notevolmente superiore (570° — 650°) a quella di disidratazione completa del caolino e della sericite.

d) *bauxite — idrargillite — magnesite*

Nella Tav. 4 sono riportate anche le curve di disidratazione di una bauxite (bauxite di Cusano Mutri) e di una idrargillite naturale (istriana). Le due sostanze sono state identificate nella loro specie mineralogica a mezzo degli spettri Debye, risultati identici a quelli ricavati da Böhm [1]) per detti minerali Tav. 5.

La bauxite era di tipo chiaro, conteneva circa il 12 % di Fe_2O_3 e presentava una perdita di peso alla calcinazione del 14,9 %.

L' eliminazione dell' acqua avviene bruscamente ad una temperatura di circa 480°. La piccola perdita di peso osservabile a 350° è dovuta alla disidratazione dell'ossido idrato di ferro.

L'idrargillite accusava una perdita di peso alla calcinazione del 35,8 %

---

[1]) Böhm. Zeit. anorg. allg. Chem. *149*; 203; (1925).

(Al_2O_3. 3,16 H_2O). L' eliminazione dell' acqua avviene bruscamente ed in maniera quasi completa ad una temperatura di circa 250° [1]).

Nella disidratazione dell'idrargillite naturale non ha pertanto riscontrato le discontinuità osservate nella demolizione termica dell' allumina Bayer [2]).

L'ultima curva riproduce l'andamento della decarbonatazione di una magnesite naturale (magnesite dell' Eubea).

La decomposizione termica del carbonato si inizia a 410° ÷ 420° ed è completa a 550° [3]).

La documentazione riprodotta nelle tavole allegate alla Nota mostra che il metodo della registrazione continua di curve di riscaldamento a mezzo della termobilancia offre sensibilità pari a quella raggiungibile con l'analisi termica di precisione. Si ha in più il vantaggio che il risultato desiderato può conseguirsi adoperando solo piccole quantità di materiale, quantità comunque insufficienti per l' esame secondo i dettami dell' analisi termica.

Napoli, Istituto di Chimica Farmaceutica della R. Università.

---

[1]) Hackspill e Stempfel, l. c. — Houldsworth, Trans. Cer. Soc. *23*; 279; (1924).

[2]) Handbuch allg. Chem. *IX*; Fricke e Hüttig, *Hydroxyde und oxydhydrate* — Akademische Verlagsgesellschaft. Lipsia 1937.

[3]) Giannone, Rend. Acc. Sc. Fis. Mat. — Napoli (4); *9*; (1939).

Sulla preparazione della mullite per trattamento termico di miscele di caolino e allumina

Nota dell'ing. **Vincenzo Sollazzo**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 11 novembre 1939 - XVIII)

Sunto. — L' A. esamina l'influenza esercitata da alcune sostanze: CaF_2, Fe_2O_3, MgO, sulla trasformazione mullitica di miscele di caolino e allumina sottoposte a pressione elevata e successivamente a trattamento termico.

Le ottime qualità dei refrattari mullitici preparati a partire dai minerali del gruppo della sillimanite: sillimanite, andalusite, nonchè — più diffusa sul mercato europeo — la cianite indiana, ed insieme, la scarsità di tali minerali naturali, hanno da tempo spinto i tecnici ad esaminare le possibilità di produzione della mullite sintetica.

La mullite ottenuta per elettrofusione costituisce senza dubbio un materiale di alta qualità ai fini della destinazione all'industria dei refrattari; tuttavia l'alto costo di produzione inibisce l'estendersi delle sue applicazioni che sono relegate solo a impieghi specialissimi (tipo ad es.: quelli delle masse Cohrart).

Arricchire di Al_2O_3 i caolini e le argille refrattarie per miscelatura con bauxiti e diaspori e successiva cottura nei comuni forni in uso presso l'industria ceramica — sottoporre cioè la miscela ad un trattamento termico meno oneroso di quello che comporta la fusione al forno elettrico — non ha fornito risultato praticamente soddisfacente, perchè, sebbene a quelle temperature di cottura sia possibile la combinazione della silice con l'allumina per dar luogo a mullite, detta mullite non ha modo di svilupparsi in quegli aggregati cristallini, fibrosi, che costituiscono la caratteristica tessitura dei materiali ricavati per raffreddamento dei fusi o per trattamento termico dei minerali del gruppo della sillimanite.

Ne consegue che lo chamotte così ottenuto non è sufficientemente compatto, di buona resistenza meccanica, di alta stabilità di volume, e pertanto volendo ovviare a tali inconvenienti occorre in pratica spingere la cottura sia per la durata, sia per la temperatura, al di là di limiti oltre i quali il processo presenta scarse prospettive di realizzazione sul piano economico.

Si pensi inoltre che la mullitizzazione dell' allumina si arresta alla superficie dei granuli e solo molto lentamente penetra a cuore di essi, anche per finezze di macinazione della miscela: allumina-argilla, assai spinte.

Il problema tecnico che è alla base della preparazione della mullite

per questa via verte non tanto sulla possibilità di formazione del composto, quanto, e particolarmente, sulla possibilità di dare origine ad un flusso che favorisca la cristallizzazione della mullite stessa in un aggregato rispondente alle caratteristiche desiderate.

Scaldando una miscela: allumina-argilla, nei rapporti: $SiO_2 : Al_2O_3 = 1 : 1$, è presente a partire da 1545°, del liquido altamente silicioso poco adatto per la sua viscosità elevata ad agire efficacemente sulla cristallizzazione della mullite formatasi a temperatura più bassa. Innalzando la temperatura aumenta la quantità di detto liquido ma non diminuisce sufficientemente la sua viscosità ai fini di un'azione favorevole sull'ingrossamento dei cristalli di mullite, azione favorevole che può manifestarsi per dissoluzione e successiva ricristallizzazione del composto.

La presenza di sostanze accessorie, specialmente sostanze basiche, provoca un miglioramento della struttura mullitica del materiale, sempre però l'aggiunta deve esser contenuta in modo da non danneggiare la refrattarietà dei prodotti.

Tentativi di questa direzione si trovano descritti nella letteratura senza che tuttavia i risultati conseguiti abbiano permesso delle realizzazioni pratiche degne di rilievo.

Ho creduto utile di prendere in esame il problema dell'ottenimento di chamotte mullitico mediante l'impiego di alcune sostanze estranee alla miscela: allumina-argilla.

Ho confezionato per questo quattro mescolanze di caolino (caolino di Carlsbad molto puro) e allumina (allumina idrata) nelle quali il rapporto $SiO_2 : Al_2O_3$ è stato mantenuto all'incirca uguale all'unità.

Non ho fissato questo rapporto sul valore di 2 : 3 che compete alla mullite, per utilizzare la presenza del flusso silicioso che prende origine alla temperatura dell'eutettico: mullite-cristobalite (1545) [1].

A tre dei miscugli di cui sopra ho addizionato in ragione del 3 % rispettivamente: CaF_2, MgO, Fe_2O_3.

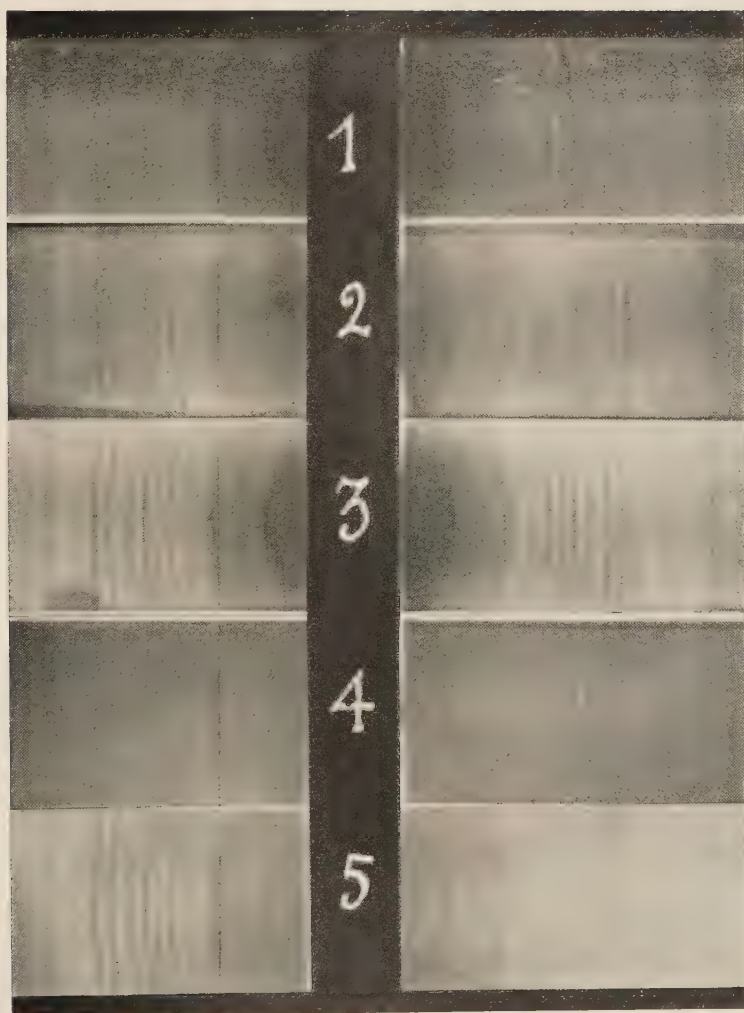
La finezza dei materiali singoli è stata spinta fino a non avere residuo sul setaccio di 4900 maglie / cm^2; la loro mescolanza è stata poi effettuata in molino a palle e a umido.

Dopo essicamento, con le polveri in questione si sono formate a pressione (700 kgr / cm^2) delle mattonelle che sono state cotte per quattro ore al C. S. 17.

Dallo chanotte così ottenuto ho ricavato, previa frantumazione e classificazione, le graniture adoperate nella successiva confezione di blocchetti di refrattario.

---

[1]) Bowen e Greig, Journ. Am. Cer. Soc., 7, 4, (1924).

1
2
3
4
5

Per questa seconda operazione ho adottato la seguente distribuzione granulometrica.

35 % di elementi di grani compresi fra 2 mm. e 0,6 mm di Φ
30 % » » » » » fra 0,6 mm. e 0,1 » » »
35 % » » » » minori di 0,1 mm. » »

Come legante ho adoperato del caolino.

La formatura dei blocchetti è stata effettuata a pressione (700 kgr/cm²); la cottura, dopo essicamento, in forno a nafta al C. S. 17 per cinque ore.

Le prove tecniche sui prodotti cotti, eseguite secondo i dettami del C. T. I., hanno fornito i valori elencati nella Tab..

	1	2	3	4
Aggiunta	—	CaF_2	MgO	Fe_2O_3
Peso specifico	2,87	2,95	2,87	2,94
Densità apparente	2,15	2,36	2,11	2,28
Porosità %	27,5	14,3	26,9	28,0
Refrattarietà C. S.	38÷39	29÷30	34	37÷38
Ti	1650°	1450°	1570°	1650°
Tr	1670°	1450°	1580°	1670°
Ts	1820°	1570°	1710°	1820°

Nella fig. 1 sono riportati i diagrammi: temperatura — deformazione, ricavati saggiando i provini sotto il carico di 2 kgr/cm².

I risultati mostrano che i refrattari n° 1 e n° 4 hanno — nei riguardi delle caratteristiche esaminate — comportamento non molto dissimile da quello dei prodotti mullitici del commercio ottenuti a partire dalla cianite. Si nota solo l'assenza della dilatazione al disopra dei 1000°, dilatazione che nei refrattari preparati con la cianite, è dovuta alla scissione del minerale in mullite e vetro siliceo (∼ 1350°).

È da notare che l'aggiunta di ossido ferrico mentre ha azione sfavorevole sulla refrattarietà, non pregiudica il comportamento sotto carico a caldo.

Magnesia e fluorite, e specialmente quest'ultimo prodotto, danneggiano invece il refrattario tanto nei riguardi della refrattarietà, quanto verso quelli della resistenza alla deformazione a temperatura elevata.

Le curve termo-dilatometriche, dato il loro andamento rettilineo, portano ad escludere la presenza di silice libera nelle forme cristalline: cristobalite e dridimite. Dette curve non mostrano infatti le inflessioni che caratterizzano i passaggi: $\gamma \rightleftarrows \beta \leftrightarrows \alpha$.

Nella fig. 2 sono riportati i röntgenogrammi ricavati per ciascuno dei tipi studiati.

Gli spettri di raggi X risultano analoghi a quelli della mullite da me preparata per fusione al forno elettrico (N. 5 della fig. 2). Non vi si notano

cioè nè le righe dell' allumina nè quelle delle varietà di silice la cui esistenza è possibile stante la storia termica del materiale.

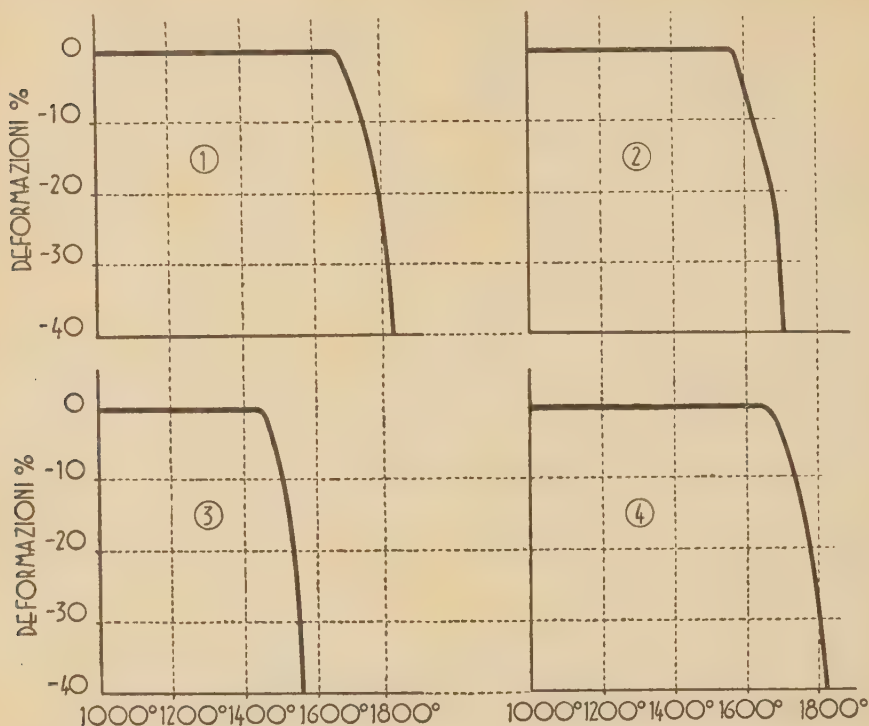



Fig. 1.

L'assieme dei risultati di cui ho dato conto nel corso della Nota conferma [1]) che per condizioni non eccessivamente onerose di temperatura e di durata di cottura è possibile conseguire una cospicua mullitizzazione di miscugli di caolino e allumina contenenti SiO_2 e Al_2O_3 nel rapporto 1 : 1, sia in assenza, sia in presenza di flussi mineralizzatori.

Indipendentemente dall'entità del processo di mullitizzazione è interessante far rilevare che lo chamotte che ho ottenuto nelle condizioni sperimentali descritte, permette di confezionare, per formatura a pressione elevata e con granulometria scelta in modo da favorire la compattezza del prodotto finito, delle masse refrattarie ad alto titolo di Al_2O_3, che accusano caratteristiche tecniche vicine a quelle rilevabili per i materiali ottenuti mediante l' impiego dei minerali naturali del gruppo della sillimanite.

---

[1]) O. Rebuffat, Atti R. Istit. d'Incor. di Napoli, 1924.

Napoli, Istituto di Chimica Industriale della R. Università.

Sulla ruota a disco di uniforme resistenza fuori del regime di progetto

Nota del Prof. **Raffaele Tarantini**, *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 11 novembre 1939 - XVIII)

Sunto. — In una parte propedeutica viene risoluto, per la prima volta completamente, il problema della distribuzione delle tensioni nel disco di uniforme resistenza nel caso generale in cui esistano condizioni che non implichino necessariamente l'uniformità delle tensioni medesime. Nella parte successiva, si utilizza la soluzione conseguita per rintracciare e rendere note numerose proprietà della ruota utilizzante una porzione di tale disco, pervenendosi tra l'altro al calcolo diretto di quella importantissima velocità per la quale si produce il pericoloso scalettamento della ruota. In un'ultima parte, si dànno delle espressioni semplificate per il calcolo approssimato e più rapido della detta velocità di scalettamento.

Premesse

Nelle giranti delle turbine a vapore, in quelle di alcuni compressori centrifughi, nei volanti dei motori endotermici veloci, ricordando così solo i casi precipui, trova largo impiego una categoria di ruote caratterizzata dal presentare la parte compresa tra corona e mozzo foggiata a disco di uniforme resistenza,

Per disco (rotante) di uniforme resistenza dovrebbe intendersi, a rigore, qualsiasi disco in cui il grado di sicurezza, nei riguardi dell'eventuale rottura per gli effetti d'inerzia accompagnanti la rotazione intorno all'asse principale, presenti, a regime ed in ogni regione dell'organo, lo stesso valore. Or essendo considerevole il numero delle ipotesi, vecchie e nuove, ciascuna più o meno attendibile secondo il materiale, circa l'ente (tensione normale o di taglio, deformazione o lavoro di deformazione, ecc.) che prevale nel provocare il fenomeno della rottura, è chiaro che altrettanto numerosi debbano ritenersi i tipi di disco cui competerebbe imparzialmente il medesimo appellativo. È noto tuttavia che con esso, in mancanza di specificazione, si suole intendere soltanto il più comune tra i detti tipi: quello corrispondente alla ipotesi che la rottura sia imputabile al superamento di un certo limite da parte della tensione normale. Ciò non per tanto, preferiamo dichiarare esplicitamente che per l'appunto quest'ultimo tipo, di gran lunga il più diffuso, è quello di cui ci occuperemo; anzi aggiungiamo che, quando non possa sorgere equivoco, chiameremo per brevità semplicemente disco anche quella sola parte di esso, analiticamente infinito, che compare utilizzata nella ruota.

Parecchie sono le ragioni della preferenza che la tecnica accorda al precisato tipo di disco e non solo per le ruote molto veloci, cioè anche là dove non sembrerebbe indispensabile il sostituirlo al tipo di spessore uniforme e di lavorazione certamente più sbrigativa.

In vero, il disco di uniforme resistenza, presentando uno spessore crescente verso l' asse, si presta meglio ad un buon raccordo col mozzo di cui rende così nello stesso tempo più sicuro il calcolo; permette di ridurre in misura più forte la tensione nella corona che, nelle turbine, costituisce sempre una parte molteplicemente tormentata; possiede minore tendenza ad ampie vibrazioni; conduce a calcoli più semplici per il progetto dell'intera ruota, permettendo tra l'altro di scindere in un certo modo ciò che riguarda la corona da quello che si riferisce al mozzo.

Queste, desunte direttamente dai fatti, le ragioni essenziali della preferenza goduta anche dalla categoria di ruote in esame la quale, se pur altre se ne impongono per le altissime velocità, resta sempre tra quelle di maggior conto ed impiego. A rendere più cospicuo il vantaggio per ultimo sopra elencato, ci siamo adoperati in un'altra nota ([1]), anch'essa in questo medesimo volume del Rendiconto.

Dati appunto i pregi della ruota a disco di uniforme resistenza, è intanto motivo di giustificato rincrescimento che uno dei principali, la semplicità della progettazione per via semplicemente analitica, non trovi alcun riscontro in occasione di interessanti verifiche tra cui, importantissima, quella della velocità di scalettamento sulla quale sarebbe di somma utilità pratica potersi procurare agevolmente idee di sufficiente precisione, laddove a tal fine non si presenta attualmente altra via che quella stessa, laboriosissima, sostanzialmente percorsa nel progettare le ruote a disco di profilo empirico.

Tale via è, inevitabilmente, la risoluzione d'un sistema di due equazioni differenziali, eseguita volta per volta, in ogni singolo caso particolare, mediante procedimenti di calcolo per differenze finite, dal fastidioso incedere per tentantivi e richiedenti la suddivisione dell' intera ruota in anelli elementari tanto più numerosi, quanto maggiormente il profilo si discosta da quello di un unico disco di spessore uniforme.

Vero è che, avendo di mira la verifica delle ruote a profilo empirico, i cennati procedimenti si sono andati col tempo sempre più ordinando e snellendo: tra i migliori quello del DONATH [2]) che ha resistito per oltre un ventennio, poi quello del GRAMMEL [3]), indi ancora l' altro del BAER [4])

---

[1]) *« Sul progetto preliminare d' una ruota a disco d' uniforme resistenza ».*

[2]) M. DONATH — *Die Berechnung rotierender Scheiben u. Ringe.*, Berlin, 1912.

[3]) R. GRAMMEL — *Ein neues Verfahren zur Berechnung rotierender Scheiben.* Dingl. pol. J. 1923, pag. 217.

[4]) H. BAER — *Vereinfachte Berechnung umlaufender Scheiben.*, Forsch. Ing-Wes, 1936, pag. 187.

ed infine il recentissimo del GRUBER [1]; ma i cennati caratteri originari permangono, naturalmente, in tutti questi procedimenti insieme alla laboriosità, tuttora sensibilissima per quanto ingegnosamente ridotta, e non sono tollerabili se non quando se ne sfrutti per intero il gran pregio dell'applicabilità ad un profilo arbitrario.

Tutto ciò sembra invece intollerabile e da evitarsi nel nostro caso, ove la particolare e ben definita forma del disco è garanzia che un metodo appropriato debba prestarsi, con ben maggiore agilità, alle più svariate indagini.

Di fatto, la soluzione del problema riguardante la distribuzione delle tensioni nel disco d'uniforme resistenza nel caso generale in cui esistano condizioni che non implichino necessariamente l'uniformità delle tensioni medesime, soluzione che forma oggetto della seguente parte di questa nota, conduce, come sarà mostrato nelle applicazioni, non solo a rintracciare direttamente la menzionata velocità di scalettamanto, ma ancora a scovrire numerose ed interessanti proprietà della categoria di ruote in argomento.

Del disco di uniforme resistenza

Quantunque sia qui da presupporre perfettamente note sia la maniera di pervenire al profilo del nostro disco, sia quella comunemente usata per progettare la ruota in questione, non possiamo esimerci, a causa di alcuni necessari richiami, dal riassumere almeno la prima ponendo in particolare rilievo i punti che, per il nostro scopo, meritano speciale attenzione.

Sia dato un disco con piano di simmetria normale all'asse e la fig. 1 ne rappresenti, proiettato su tale piano, un elemento isolato mediante due piani meridiani racchiudenti l'angolo $d\alpha$ e due superficie cilindriche, coassiali al disco stesso nonchè di raggi r ed $r + dr$: per maggior chiarezza, non compaiono rammentate in figura che le sole tensioni unitarie di superficie, tra cui sono nulle quelle relative alla faccetta in vista ed a quella opposta, dato che si suppone nulla la pressione nell'ambiente circostante. A proposito di quest' ultima pressione, notiamo che il supporla diversa da zero non conferirebbe una forma diversa alla rappresentazione analitica del profilo ricercato.

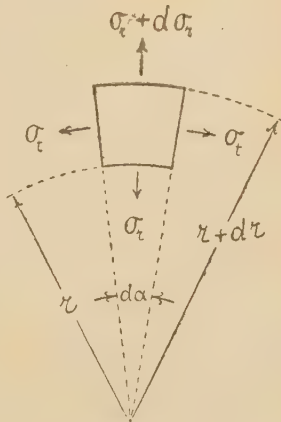



Fig. 1.

---

[1]) W. GRUBER — *Berechnung umlaufender Scheiben.*, Forsch. Ing-Wes. 1939, pag. 142.

Detta dunque μ la densità del materiale, ω la velocità angolare, la forza centrifuga che sollecita l'elemento, non segnata in figura, è misurata da $\mu\omega^2 r^2 s d s d r$ essendo s lo spessore in corrispondenza del raggio r e l'equazione dell'equilibrio nella direzione radiale, essendo nulla ogni tensione fuori del piano del moto, fornisce

$$d(\sigma_r s r d\alpha) - 2\sigma_t s dr \operatorname{sen} \frac{d\alpha}{2} + \mu\omega^2 r^2 s dr d\alpha = 0$$

che, per essere $d\alpha$ infinitesimo ed arbitrario, si riduce in ogni caso a

$$d(\sigma_r s r) - \sigma_t s dr + \mu\omega^2 r^2 s dr = 0. \qquad (1)$$

Qualora si voglia che la tensione σ_t, che diremo *tangenziale*, e l'altra σ_r, che diremo *radiale*, risultino eguali tra loro e, pel valore ω_0 di ω, eguali a σ_0 indipendente dalla variabile r, la (1) che inizialmente conteneva ben tre funzioni incognite (σ_t, σ_r, s) ne resta a contenere una sola (la s) e diventa perciò sufficiente a determinare il problema.

In queste ipotesi, la (1) diventa

$$d(rs) - sdr + s\frac{\mu\omega_0^2}{\sigma_0} r^2 dr = 0$$

da cui, separando le variabili ed integrando, si ha

$$ln\, s = -\frac{\mu\omega_0^2}{2\sigma_0} r^2 + ln\, s_0$$

nella quale, sotto la forma $ln\, s_0$, è rappresentata la costante d'integrazione.

Passando ai numeri, si ha

$$s = s_0 e^{-\frac{\mu\omega_0^2}{2\sigma_0} r^2} \qquad (2)$$

in cui è facile riconoscere che s_0 è lo spessore sull'asse.

Si noti che alla conclusione (2) si è pervenuti in quanto si è implicitamente ammesso, fin dall'inizio, che la σ_r sia uniforme su tutto lo spessore s e coincidente con una delle tensioni principali: ciò conduce all'equazione d'equilibrio (1) in vero molto comoda per l'assenza d'ogni tensione di taglio, onde si è anche potuto estendere l'elemento a tutto lo spessore s, ma richiede che s poi riesca di fatto tanto lentamente crescente verso l'asse da potersi escludere una conseguente approssimazione troppo grossolana per l'appunto nella perseguita uniformità delle tensioni. La misura suffi-

ciente della cennata lentezza si trova per altra via e su di essa ritorneremo brevemente in seguito.

Intanto, il disco così definito non ammette l'esistenza d'un foro pel passaggio d'un albero e, di più, presenta necessariamente un diametro equatoriale infinito.

C'interessa notare subito che quest'organo, irrealizzabile, appare, sia pure in astratto, di uniforme resistenza per qualsiasi velocità ω, con tensione interna $\sigma = \sigma_0 \omega^2 / \omega_0^2$: fatto che esprimeremo dicendo che esso ammette infinite ***velocità di uniforme resistenza.***

Quando, invece, di un tal disco si realizza soltanto una parte nel collegamento di una corona, eventualmente fornità d'una palettatura radiale che alla velocità ω_0 eserciti una trazione t_0 ritenuta uniforme, con un mozzo il quale alla stessa velocità ω_0 stringa ancora l'albero con la pressione p_0 ritenuta uniforme, è nota la pratica possibilità di proporzionare l'insieme in maniera che, alla velocità ω_0, nella parte di disco utilizzata, si stabilisca la tensione uniforme σ_0, come nel disco originario. Per una tale ruota diremo che $\omega_0, \sigma_0, t_0, p_0$ sono gli elementi, o condizioni *di progetto*, ed, essendo oramai escluso l'equivoco, diremo anche brevemente che ω_0 è velocità d'uniforme resistenza *per la ruota.*

Ma una ruota costruita e montata in modo da ammettere una certa velocità di uniforme resistenza ω_0 non ammette, come è noto, alcun altra velocità (e, come dimostreremo, almeno per le stesse condizioni di montaggio) che sia anch'essa di uniforme resistenza. In altri termini, il disco allo studio, ridotto ad una sua parte ed utilizzato in una ruota, non ammetterà più, in generale, infinite velocità di uniforme resistenza e la ruota, mantenuta ad una velocità di regime diversa da quella di progetto, presenterà nel disco una distribuzione delle tensioni che ci è in generale completamente ignota, onde ci riuscirà anche impossibile conoscere ciò che avviene in tal caso nella corona e nel mozzo, a meno che non si voglia ricorrere a qualcuno dei procedimenti ricordati nelle premesse.

Convenendo di trattare la corona ed il mozzo come due elementi di disco a spessore uniforme, la cui teoria è ben acquisita, sarà per essi possibile determinare le espressioni finite delle tensioni interne, appena si riuscirà in qualche modo a definire le condizioni ai limiti.

Per fare dunque completa luce, mediante espressioni finite, sulla distribuzione delle tensioni e delle deformazioni nell'intera ruota, occorre anzitutto rintracciare simili espressioni per σ_r e σ_t nel disco definito dalla (2) quando, girando esso con una velocità di regime ω qualsiasi, si preveda che speciali condizioni (come imposte non c' interessa, per ora) possano escludere l'indipendenza delle dette tensioni da r e la loro eguaglianza.

Lo STODOLA [1]), rivolgendosi alla deformazione unitaria tangenziale, tenta

---

[1]) *Dampf- u. Gasturbinen.* (VI Auflage, Springer. 1924), pag. 889-91.

in sostanza questo problema, ma ne lascia a metà la soluzione, lasciando anche sorgere dubbio circa l'utilità delle serie risolutive, per una svista occasionale (che rileveremo) nella previsione del loro raggio di convergenza, svista di tutto cuore perdonabile ad un Maestro tanto illustre, dinanzi alla cui vastissima e preziosa produzione non c'è che da inchinarsi ammirati e riconoscenti.

Ritorniamo allora, pel nostro scopo, alla (1) che non cessa di esprimere la condizione d'equilibrio dell'elemento del disco, benchè σ_r e σ_t siano ora da trattare come funzioni incognite e distinte della r, e la s da intendersi definita dalla (2) che scriveremo provvisoriamente

$$s = s_0 e^{-\frac{A}{2} r^2} \tag{3}$$

in cui è

$$A = \frac{\mu \omega_0^2}{\sigma_0}. \tag{4}$$

Dalla (1) si ricava

$$rs \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r r \frac{ds}{dr} + \sigma_r s - \sigma_t s + \mu \omega^2 r^2 s = 0$$

che, risultando dalla (3) $ds/dr = -Ars$, diventa

$$\sigma_t = (1 - Ar^2)\sigma_r + r \frac{d\sigma_r}{dr} + \mu \omega^2 r^2. \tag{5}$$

Poichè la (5) contiene ancora le due funzioni incognite, occorre un'altra equazione che sarà quella di compatibilità e che, indicando con $1/m$ il rapporto del Poisson, si scrive

$$(\sigma_t - \sigma_r)\left(1 + \frac{1}{m}\right) + r \frac{d\sigma_t}{dr} - \frac{r}{m} \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \tag{6}$$

e si trova eliminando l'incognita ausiliaria λ tra le due relazioni

$$\frac{\lambda}{r} = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{\sigma_r}{m}\right) \quad , \quad \frac{d\lambda}{dr} = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{\sigma_t}{m}\right)$$

in cui λ è l'allungamento totale del raggio r ed E il modulo di elasticità normale [1]).

[1]) Belluzzo G., *Le turbine a vapore*, Milano, Hoepli, 1923, Vol. II. pag. 115.

Sostituendo nella (6) le espressioni di σ_t e di $d\sigma_t / dr$ ricavate dalla (5), indicando con apici le derivazioni rispetto ad r e ponendo, per brevità,

$$\frac{3m+1}{m} = q \tag{7}$$

si ottiene

$$\sigma_r'' + \frac{3 - Ar^2}{r} \sigma_r' - qA\sigma_r + q\mu\omega^2 = 0 \tag{8}$$

Questa equazione nella sola funzione incognita σ_r, differenziale lineare del 2° ordine, a coefficienti variabili, non omogena, corrisponde a quella data, senza seguito, dallo Stodola (l. c. formola 21)

$$r^2\sigma_r'' + r\left(3 + r\frac{s'}{s}\right)\sigma_r' + \left[\left(2 + \frac{1}{m}\right)r\frac{s'}{s} + r^2\frac{d}{dr}\left(\frac{s'}{s}\right)\right]\sigma_r + \left(3 + \frac{1}{m}\right)\mu\omega^2 r^2 = 0.$$

Prima d'andare oltre la (8), appare tempestivo indrodurre fin d'ora un cambiamento di variabile: lo scopo è di evitare che il simbolo di una lunghezza abbia a comparire, in seguito, sotto il segno di logaritmo, come accade nel cennato inizio di soluzione dello Stodola rispetto alla deformazione tangenziale.

Col voler qui evitare che una grandezza fisicamente dimensionata risulti argomento d'una funzione trascendente, non s'intende rispettare una inderogabile esigenza di principio, ma piuttosto risparmiare alle espressioni definitive un aspetto il quale, se non raro ad esempio nella termodinamica teorica, e gli scritti del Nertst ne fanno ampia fede, risulta invece molto lontano dal consueto nelle espressioni di meccanica, specie applicata alle questioni di tecnica costruttiva, in cui sembra doveroso disporre le cose in modo da rendere agevolissimi, nell' uso, sia la verifica dell'omogeneità dimensionale, sia l'impiego di qualsiasi sistema di misura.

Per queste non trascurabili ragioni, ed ancora per conseguire nello stesso tempo altri vantaggi di chiarezza e di concisione anch' essi destinati ad apparire meglio in prosieguo, procediamo come segue.

Indichiamo con u_{e0} la velocità periferica di progetto misurata alla distanza dall'asse r_e (che poi assumeremo come raggio del disco all'attacco con la corona); poniamo cioè $u_{e0} = r_e\,\omega_0$ e poniamo ancora

$$z = \frac{r^2}{r_e^2} \tag{9}$$

Mediante questi simboli, l'esponente della (2) si può scrivere

$$-\frac{\mu\omega_0^2}{2\sigma_0} r^2 = -\frac{\mu u_{e0}^2}{2\sigma_0} z\,;$$

sicchè, posto

$$N = \frac{\mu u_{eo}^2}{4\sigma_0}, \tag{10}$$

dal paragone con la (4) si ottiene $A = 4N\frac{z}{r^2}$ e le (2) e (3) si scrivono

$$s = s_0 e^{-2Nz} \tag{11}$$

Si noti incidentalmente che N e z sono semplici numeri e che, sotto gl'infiniti valori assumibili per N, si trovano raggruppati tutti i concepibili dischi del tipo in esame, quale che sia il materiale (elastico ed isotropo) d'ognuno e quali che siano ω_o, σ_o, r_e: ciascun gruppo riuscendo caratterizzato da una distinta corrispondenza biunivoca tra il valore di N e quello del rapporto s/s_o per gli stessi valori di z.

È facile verificare che, con la trasformazione sopra indicata, la (5) e la (8) assumono rispettivamente le forme

$$\sigma_t = (1 - 4Nz)\sigma_r + 2z\sigma_r' + 4\sigma_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} Nz \tag{5a}$$

$$z\sigma_r'' + 2(1 - Nz)\sigma_r' - qN\sigma_r + q\sigma_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} N = 0. \tag{8a}$$

in cui gli apici indicano ora derivazioni rispetto a z.

Veniamo quindi alla integrazione della (8a), seguendo in linea di massima il metodo ricordato dallo STODOLA (l. c.) e da lui solo in parte applicato, dopo averlo riassunto con i suoi stessi simboli e rettificato in qualche asserzione.

Un'equazione lineare del 2° ordine, non omogenea, si possa porre sotto la forma

$$x^2 p_0(x)\frac{d^2\xi}{dx^2} + xp_1(x)\frac{d\xi}{dx} + p_2(x)\xi = p(x) \tag{a}$$

in cui $p_o(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ siano funzioni sviluppabili in serie ordinarie di potenze di x e che, per $x = 0$, non si annullino tutte insieme.

Supponiamo di conoscere un integrale particolare ξ_o della (a); sicchè, ponendo $\xi = \eta + \xi_o$, essa si trasformi in

$$x^2 p_0(x)\eta'' + xp_1(x)\eta' + p_2(x)\eta = 0 \tag{b}$$

nella quale è scomparso il termine nella sola variabile e che dicesi « forma normale per $x = 0$ »

Detti ora, nell' ordine, c_0, c'_0, c''_0 i termini costanti di p_0, p_1, p_2, le radici u e v dell' equazione determinatrice

$$c_0 w(w-1) + c'_0 w + c''_0 = 0$$

permettono di costruire i due integrali particolari e distinti della (b)

$$\eta_1 = x^u(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots)$$
$$\eta_2 = x^v(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots)$$

a meno che $u - v$ non sia un intero, nel qual caso i due integrali si riducono effettivamente ad uno solo che, sopposto $u > v$, seguiteremo ad indicare con η_1. In questo caso, che è proprio quello del nostro problema, un secondo integrale si presenta come indipendente nella forma

$$\eta_2 = x^u(a_0 + a_1 x + a_2 x^3 + \dots)\, lnx + x^v(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots) \quad (12)$$

È tuttavia superfluo porre l'integrale generale della (b) sotto la forma $\eta = \eta_1 + \eta_2$, poichè l'integrale (12), rintracciato originariamente dal Fuchs [1]) con metodo mirante ad ottenere un integrale particolare indipendente, finisce per manifestare la forma dell'integrale generale il quale non si altera, come è noto, per l'aggiunta di qualsiasi altro integrale particolare, magari moltiplicato per una costante arbitraria. Sostituendo, infatti, la (12) in (b) ed annullando separatamente tutti i singoli coefficienti delle potenze di x che appaiono moltiplicati per $ln\, z$, nonchè quelli delle potenze della stessa x libere dal detto fattore, si ha, come del resto constateremo nel nostro caso, un sistema di equazioni il quale determina tutte le a e tutte le b, tranne due che rimangono indeterminate ed appaiono sostenere la parte delle due necessarie e sufficienti costanti d' integrazione. Infine, il campo di convergenza delle serie risolutive non s'estende dallo zero al più vicino valore di x pel quale si annulli qualcuno dei rapporti p_1/p_0, p_2/p_0 come afferma per una svista lo Stodola, ma dallo zero all'infinito, o fino al più vicino valore di x pel quale eventualmente si annulli p_0.

Ritornando alla nostra (8a), ne rileviamo subito l'integrale particolare

$$\sigma_r^* = \sigma_0 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad (13)$$

e perciò, sostituendovi $\sigma_r = \eta + \sigma_r^*$, si ha una equazione che, posta sotto la forma normale, appare

$$z^2\eta'' + z2(1 - Nz)\eta' - qNz\eta = 0 \quad (14)$$

[1]) Fuchs., Crelles Journ., Vol. 66 (1866), N.ri 5 e 6.

in cui risultano

$$p_0(z) = 1 \quad , \quad p_1(z) = 2(1 - Nz) \quad , \quad p_2(z) = -qNz$$

Avendosi quindi $c_0 = 1$, $c'_0 = 2$, $c''_0 = 0$, la determinatrice è

$$w(w-1) + 2w = 0$$

Poichè le radici di questa sono $u = 0$ e $v = -1$, l'integrale della (14) assumerà la forma (12) e, con opportune modifiche degli indici, potremo scriverlo

$$\eta = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots) \, lnz + z^{-1}(b_{-1} + b_0 z + b_1 z^2 + \ldots) \quad (15)$$

Ai fini della sostituzione delle (15) nella (14) per la determinazione delle a e delle b, conviene scrivere

$$\eta = (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots) lnz + b_{-1} z^{-1} + b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots$$

$$\eta' = [a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \ldots + (n+1) a_{n+1} z^n + \ldots] lnz + a_0 z^{-1} + a_1 + a_2 z + \ldots + a_{n+1} z^n + \ldots$$
$$- b_{-1} z^{-2} + b_1 + 2b_2 z + \ldots + (n+1) b_{n+1} z^n + \ldots$$

$$\eta'' = [2a_2 + 6a_3 z + 12 a_4 z^2 + \ldots + (n+2)(n+1) a_{n+2} z^n + \ldots] \, lnz +$$
$$+ a_1 z^{-1} + 2a_2 + 3a_3 z + \ldots + (n+2) a_{n+2} z^n + \ldots$$
$$- a_0 z^{-2} + a_2 + 2a_3 z + \ldots + (n+1) a_{n+2} z^n + \ldots$$
$$+ 2b_{-1} z^{-3} + 2b_2 + 6b_3 z + \ldots + (n+2)(n+1) b_{n+2} z^n + \ldots$$

Sostituendo queste espressioni nella (14), che per l'occasione conviene dividere per z, e limitando in un primo tempo l'annullamento ai soli coefficienti delle potenze di z che hanno a fattore lnz, si ha successivamente, per le potenze di grado 1, 2,... n,...

$$2a_1 - qNa_0 = 0 \qquad \text{da cui} \qquad \frac{a_1}{a_0} = \frac{q}{2} N$$

$$6a_2 - (2+q) N a_1 = 0 \qquad » \quad » \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{q+2}{6} N$$

. . . .

$$n(n+1) a_n - [2(n-1) + q] N a_{n-1} = 0 \qquad » \quad » \qquad \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{q + 2(n-1)}{n(n+1)} N \quad (16)$$

. . . .

Moltiplicando per membri le equazioni qui sopra incolonnate a destra, si ottiene

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{q(q+2)(q+4)\ldots[q+2(n-1)]}{n!\,(n+1)!} N^n. \quad (17)$$

Si vede chiaramente che, come preveduto, le equazioni trovate non determinano a_0; ma, attribuito ad a_0 un valore determinato, a tutte le altre a restano attribuiti dei valori determinati.

Passando ora alle equazioni che si ottengono annullando i coefficienti delle altre potenze di z, quelle libere del fattore $ln\, z$, le cose si presentano lievemente meno semplici. Annullando, infatti, il coefficiente di z^{-1} si ha l'indentità $b_{-1} - b_{-1} = 0$ che nulla dice di b_{-1}; ma annullando il coefficiente di z^0, si ha poi

$$b_{-1} = \frac{a_0}{(q-2)N} \tag{18}$$

che determina perfettamente b_{-1} in funzione di a_0.

Dalle successive equazioni si ha

$$b_1 = \frac{qNb_0 + 2Na_0 - 3a_1}{2}$$

$$b_2 = \frac{(q+2)Nb_1 + 2Na_1 - 5a_2}{6}$$

. . . .

$$b_n = \frac{[q + 2(n-1)]Nb_{n-1} + 2Na_{n-1} - (2n+1)\,a_n}{n(n+1)} \tag{19}$$

. . . .

onde si vede che anche tutte le b restano determinate, quando s'immaginino assegnati a_0 e b_0. Le a_0, b_0 appaiono, in tal modo, le due costanti d'integrazione.

A questo punto il problema dei coefficienti si può dire già risoluto; ma, per predisporre le formole alla pratica applicazione, occorre senza dubbio dare l'espressione di σ_r, e poi quella che sarà rintracciata per σ_t, in maniera tale che vi si trovino bene in vista a_0 e b_0, onde si possa, caso per caso e col minimo disturbo possibile, determinare queste costanti.

Se, introducendo per comodità nuovi simboli, poniamo

$$\rho_n = \frac{q + 2(n-1)}{n(n+1)} N \tag{20}$$

e ricordiamo la (16), si ha innanzi tutto

$$a_n = \rho_n a_{n-1} \tag{21}$$

indi, la formola ricorrente (19) diventa

$$b_n = \rho_n b_{n-1} - \left[\frac{2n+1}{n(n+1)}\rho_n - \frac{2}{n(n+1)}N\right] a_{n-1} \tag{22}$$

Ponendo ancora

$$\chi_n = \frac{2n+1}{n(n+1)} \rho_n - \frac{2}{n(n+1)} N \tag{23}$$

la (22) prende la forma semplicissima

$$b_n = \rho_n b_{n-1} - \chi_n a_{n-1}.$$

Se ora, facendo $n = 1, 2, 3, \ldots$, si scrive successivamente

$$b_1 = \rho_1 b_0 - \chi_1 a_0$$
$$b_2 = \rho_2 b_1 - \chi_2 a_1 = \rho_2 \rho_1 b_0 - (\rho_2 \chi_1 + \chi_2 \rho_1) a_0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

si riconosce facilmente che è

$$b_n = \rho_1 \rho_2, \ldots \rho_n b_0 - a_0 \, \Sigma \, \rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{n-1} \chi_n \tag{24}$$

intendendo estesa la sommatoria a tutti i prodotti che si ottengono permutando ciclicamente gl'indici dei simboli sotto tale segno.

Se poniamo ancora

$$\varphi_n = \frac{q(q+2)(q+4)\ldots[q+2(n-1)]}{n!\,(n+1)!} \tag{25}$$

si ha, da una parte e per la (17),

$$a_n = \varphi_n N^n a_0 \tag{26}$$

e dall'altra, come è facile riconoscere,

$$\rho_1 \rho_2 \ldots, \rho_n = \varphi_n N^n$$

onde la (24) si può scrivere

$$b_n = b_0 \varphi_n N^n - a_0 \varphi_n N^n \sum_1^n \frac{\chi_n}{\rho_n} \tag{27}$$

Ponendo, finalmente, per brevità di scrittura,

$$\sum_1^n = \sum_1^n \left[\frac{2n+1}{n(n+1)} - \frac{2}{q+2(n-1)} \right] \tag{28}$$

si riconosce pure che la (27) si può esprimere

$$b_n = b_0 N^n \varphi_n - a_0 N^n \varphi_n \overset{n}{\underset{1}{\Sigma}} \tag{29}$$

nel cui secondo membro non conviene porre in vista i fattori comuni ai due termini, dovendo questi separarsi, insieme con a_0 e b_0, all'atto dell'introduzione della (29) nella (15).

Si noti intanto che le (18), (26) e (29), le quali forniscono tutti i coefficienti della (15) in funzione di a_0 e b_0, non contengono, oltre queste, che fattori numerici: N, infatti, è il numero caratteristico del disco e φ_n, $\overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}$ sono altri due numeri puri che si calcolano senza difficoltà in base alle (25) e (28).

Introducendo nell'espressione (15) di η le (18), (26) e (29), curando di porre in vista a_0 e b_0 e ricordando che l'integrale generale della (8a) si ottiene aggiungendo ad η la $\sigma_r{}^*$ data dalla (13), si ricava l'espressione

$$\sigma_r = a_0 \left[lnz + \frac{1}{(q-2)Nz} + (\varphi_1 lnz - \varphi_1 \overset{1}{\underset{1}{\Sigma}}) Nz + (\varphi_2 lnz - \varphi_2 \overset{2}{\underset{1}{\Sigma}}) N^2 z^2 + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (\varphi_n lnz - \varphi_n \overset{n}{\underset{1}{\Sigma}}) N^n z^n + \ldots \right] +$$
$$+ b_0 (1 + \varphi_1 Nz + \varphi_2 N^2 z^2 + \ldots + \varphi_n N^n z^n + \ldots) + \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tag{30}$$

Sostituendo poi la (30) nella (5a), si ottiene

$$\sigma_t = a_0 \left\{ lnz - \frac{8-2q}{q-2} - \frac{1}{(q-2)Nz} + [(3\varphi_1 - 4) lnz - (3 \overset{1}{\underset{1}{\Sigma}} - 2)\varphi_1] Nz + \right.$$
$$+ [(5\varphi_2 - 4\varphi_1) lnz - \{ (5 \overset{2}{\underset{1}{\Sigma}} - 2)\varphi_2 - 4\varphi_1 \overset{1}{\underset{1}{\Sigma}} \}] N^2 z^2 + \ldots$$
$$\left. \ldots + \left[\{ (2n+1)\varphi_n - 4\varphi_{n-1} \} lnz - \{ [(2n+1) \overset{n}{\underset{1}{\Sigma}} - 2]\varphi_n - 4\varphi_{n-1} \overset{n-1}{\underset{1}{\Sigma}} \} \right] N^n z^n + \ldots \right\}$$
$$+ b_0 \left\{ 1 + (3\varphi_1 - 4) Nz + (5\varphi_2 - 4\varphi_1) N^2 z^2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + [(2n+1)\varphi_n - 4\varphi_{n-1}] N^n z^n + \ldots \right\} + \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tag{31}$$

Dato che, in qualunque modo si siano ottenute le (30) e (31), esse appaiono manifestamente, dovunque convergano, gl'integrali generali del sistema assegnato, al semplice scopo dimostrativo non occorrerebbe, di tutta

la delicata teoria delle equazioni differenziali lineari di qualsiasi ordine n, a coefficienti variabili, di variabile in generale complessa, se non la proposizione: affinchè ciascuna delle serie risolventi sia convergente da zero all'infinito, o entro tutto il cerchio di centro $x = 0$ e passante per il più vicino dei punti (qualora ne esistano) che soddisfino la $p_0(x) = 0$, è necessario e sufficiente che $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots p_n(x)$ siano sviluppabili in serie ordinarie di potenze della x e sia inoltre $p_0(0) \neq 0$. Tuttavia, poichè per giungere a stabilire questa proposizione con ogni desiderabile rigore, la si può anche far precedere da qualche centinaio e mezzo di pagine inutili precisazioni [1]), invece di appellarci ad essa crediamo di accorciare abbastanza il processo logico dimostrativo che interessa il nostro caso particolare se riusciamo a rintracciare direttamente il raggio di convergenza delle nostre serie risolventi. Ci sembrerà allora, con questo che riesce facilissimo, d'aver disimpegnato a sufficienza la dimostrazione delle (30) e (31) da ogni riferimento a teorie di particolari equazioni differenziali.

Limitandoci ad esaminare la convergenza del 2° membro della (30), dato che poi è facile concludere anche a proposito della (31), vediamo ch'ivi compaiono in sostanza le due serie

$$\Sigma\, \varphi_n (Nz)^n \qquad \text{e} \qquad \Sigma\, \psi_n (Nz)^n \qquad \text{con} \qquad \psi = \varphi_n \sum_1^n$$

essendo φ_n e $\sum_1^n$ definite rispettivamente dalle (25) e (28).

Posto ora $q = 2h$, si trova agevolmente

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(h+n)}$$

onde il raggio di convergenza della prima serie è

$$R = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}} \right| = \infty$$

Giacchè poi si vede parimente che è

$$\lim_{n = \infty} \left| \frac{\sum_1^n}{\sum_1^{n+1}} \right| = 1$$

---

[1]) Heffter, *Einleitung in die Theorie der linearen Differentialgleichungen....* Lipsia, Teubner, 1894.

pure il raggio di convergenza della seconda serie risulta

$$R = \lim_{n=\infty} \left| \frac{\varphi_n \sum_1^n}{\varphi_{n+1} \sum_1^{n+1}} \right| = \infty$$

Il campo di convergenza della σ_r è dunque $(0, \infty)$ esclusi al più gli estremi che per noi non hanno importanza e che richiederebbero ancora altre parole. Se fosse esatto che il campo di convergenza si arrestasse come afferma lo Stodola dove si annulla p_1 / p_0, dall'esame della (13) esso risulterebbe $(0, 1/N)$ e già verso l'estremo superiore riuscirebbe probabilmente molto difficile poter limitare il calcolo delle serie alla somma di pochi termini.

Notiamo piuttosto che N non potrà raggiungere mai il valore 1,25, giacchè $2N$ è precisamente il logaritmo naturale del rapporto s_0 / s_3, logaritmo che è bene non raggiunga il valore 2,5 per evitare, come abbiamo gia accennato, una grossolana approssimazione nella ricercata uniformità delle tensioni nel disco, a regime di uniforme resistenza [1]. Lo stesso N si manterrà poi anche abbastanza lontano dallo zero, senza di che la forma del nostro disco tenderebbe a confondersi con quella di spessore uniforme riducendosi anche i vantaggi pratici a suo tempo elencati. Quanto alla variabile z espressa dalla (9), essa non supererà mai l'unità, convenendo nelle applicazioni di assumere per r_e il raggio del disco all'attacco con la corona. Nel caso poi che, per l'assenza del mozzo, il disco si protraesse fino all'asse, si vede che dovendosi allora annullare $\sigma_r - \sigma_t$ per $z = 0$, dovrebbe necessariamente aversi $a_0 = 0$,

Le (30) e (31), intanto, si possono concisamente porre

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= a_0 A_r + b_0 B_r + \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \\ \sigma_t &= a_0 A_t + b_0 B_t + \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \end{aligned}\right\} \qquad (32)$$

in cui A_r, A_t, B_r, B_t sono funzioni, oramai note, del solo raggio e dipendenti esclusivamente, a prescindere dal rapporto del Poisson, dal parametro N.

Se indichiamo con σ_a la tensione principale parallela all'asse di rotazione ed aggiungiamo alle (32) l'equazione $\sigma_a = 0$, otteniamo un sistema che ci rappresenta in modo completo la distribuzione delle tensioni nel disco di uniforme resistenza nel caso generale innanzi precisato, così

[1]) Stodola., *l. c.*, pag. 317 e 896; Z. d. V. d. I., pag. 1269,

come possiamo ben convenire che il sistema

$$\sigma_r = \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad , \quad \sigma_t = \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad , \quad \sigma_a = 0$$

ci rappresenti completamente la detta distribuzione in quelle condizioni, che possiamo dire particolari, per le quali il disco presenta infinite velocità di uniforme resistenza.

Condizioni che in generale escludono l'uniformità di σ_r e σ_t si possono assegnare, in linea astratta, assegnando per esempio due determinati valori delle tensioni che permettano di determinare a_0 e b_0; ovvero concretamente, in una parte finita del disco distaccata mediante due superficie cilindriche coassiali, applicando determinate tensioni esterne radiali ed uniformi sulle superficie cilindriche di troncatura, o anche impiantandovi una corona ed un mozzo, proprio a realizzare una ruota della categoria in argomento. Comunque, il secondo sistema di equazioni appare subito un caso particolare del primo. Ponendo, infatti, $\sigma_r = \sigma_t$, dalle (32) risulta subito

$$0 = a_0 (A_r - A_t) + b_0 (B_r - B_t)$$

che potrà essere soddisfatta per valori finiti e non nulli di a_0 e b_0 fin tanto che la condizione $\sigma_r = \sigma_t$ venga imposta per non più di due valori di r; ma, se detta condizione viene imposta per tutti i valori di r, come del resto anche per tre soltanto, dovrà necessariamente risultare $a_0 = b_0 = 0$ e le (32) daranno allora precisamente $\sigma_r = \sigma_t = \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$.

Si noti infine che, in virtù delle precauzioni a suo tempo prese, le (32) lasciano controllare immediatamente la loro omogeneità dimensionale rappresentando a_0 e b_0 delle tensioni, e si trasformano in espressioni adimensionali dividendone tutti i membri per σ_0.

Benchè in molte applicazioni sarà superflo, si è voluto calcolare i coefficienti numerici delle (30) e (31) fino a quelli dell'ottava potenza di z, ciò che equivale fino alla sedicesima di r, e con l'approssimazione $\pm 0{,}0005$, assumendo $m = 10/3$ come è giusto ammettere in media per l'acciaio. Si è ottenuto così;

$$\begin{aligned} \sigma_r = a_0 \Big[& lnz + \frac{0{,}769}{Nz} + (1{,}650\, lnz - 1{,}475)\, Nz + (1{,}457\, lnz - 1{,}967)\, N^2 z^2 + \\ & + (0{,}887\, lnz - 1{,}471)\, N^3 z^3 + (0{,}412\, lnz - 0{,}781)\, N^4 z^4 + \\ & + (0{,}155\, lnz - 0{,}324)\, N^5 z^5 + (0{,}049\, lnz - 0{,}110)\, N^6 z^6 + \\ & + (0{,}013\, lnz - 0{,}032)\, N^7 z^7 + (0{,}003\, lnz - 0{,}008)\, N^8 z^8 + \dots \Big] \\ + b_0 \Big[& 1 + 1{,}650\, Nz + 1{,}457\, N^2 z^2 + 0{,}887\, N^3 z^3 + 0{,}412\, N^4 z^4 + 0{,}155\, N^5 z^5 + \\ & + 0{,}049\, N^6 z^6 + 0{,}013\, N^7 z^7 + 0{,}003\, N^8 z^8 + \dots \Big] + \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \end{aligned} \tag{33}$$

$$\sigma_t = a_0 \Big[lnz - 1,077 - \frac{0,769}{Nz} + (0,950\, lnz - 1,125)\, Nz + (0,687\, lnz - 1,022) N^2 z^2 + $$
$$+ (0,376\, lnz - 0,655) N^3 z^3 + (0,164\, lnz - 0,319) N^4 z^4 +$$
$$+ (0,059\, lnz - 0,125) N^5 z^5 + (0,018\, lnz - 0,041) N^6 z^6 +$$
$$+ (0,005\, lnz - 0,012) N^7 z^7 + (0,001\, lnz - 0,003) N^8 z^8 +$$
$$+ \ldots \Big]$$

$$+ b_0 \Big[1 + 0,950\, Nz + 0,687\, N^2 z^2 + 0,376\, N^3 z^3 + 0,164\, N^4 z^4 + 0,059\, N^5 z^5 +$$
$$+ 0,018\, N^6 z^6 + 0,005\, N^7 z^7 + 0,001\, N^8 z^8 + \ldots \Big] + \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \qquad (34)$$

dalle quali deduciamo, per maggiore comodità nelle applicazioni, la deformazione unitaria tangenziale:

$$\varepsilon_t = \frac{a_0}{E} \Big[0,7\, lnz - 1,077 - \frac{1}{Nz} + (0,455\, lnz - 0,683) Nz + (0,250\, lnz - 0,432) N^2 z^2 +$$
$$+ (0,110\, lnz - 0,214) N^3 z^3 + (0,040\, lnz - 0,085) N^4 z^4 +$$
$$+ (0,013\, lnz - 0,028) N^5 z^5 + (0,003\, lnz - 0,008) N^6 z^6 +$$
$$+ (0,001\, lnz - 0,002) N^7 z^7 + \ldots \Big]$$

$$+ \frac{b_0}{E} \Big[0,7 + 0,455 Nz + 0,250 N^2 z^2 + 0,110 N^3 z^3 + 0,040 N^4 z^4 + 0,013 N^5 z^5 +$$
$$+ 0,003 N^6 z^6 + 0,001 N^7 z^7 + \ldots \Big] + \frac{0,7}{E} \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \qquad (35)$$

Applicazioni

Se si desidera conoscere la distribuzione delle tensioni in una data ruota a disco di uniforme resistenza che si trovi fuori del regime di progetto (ad esempio per diversità del forzamento sull'albero o per diversità della velocità, che si può supporre anche nulla) occorre, come già si è accennato innanzi, iniziare la ricerca dal disco, vale a dire rintracciare anzitutto i valori che nel caso competono ad a_0 e b_0. Fatto ciò, non solo le (32), e per esse le (33) e (34), daranno i valori delle tensioni per qualunque valore del raggio, ma saranno a disposizione ancora tutti gli elementi per risalire alle distribuzioni ben determinate delle tensioni nella corona e nel mozzo.

Poichè questo genere di applicazioni non comporta difficoltà di sorta, dopo aver illustrato mediante un esempio numerico la determinazione delle a_0 e b_0, preferiremo mettere a frutto il contenuto sostanziale di quanto

abbiamo innanzi dedotto, per ricavarne ulteriori deduzioni di notevole importanza.

Nel fare ciò, alterneremo le considerazioni d'indole generale a quelle dell'applicazione numerica non solo ad alleggerire l'esposizione, ma anche per mostrare, magari in anticipo, l' interesse pratico rivestito dalle varie indagini.

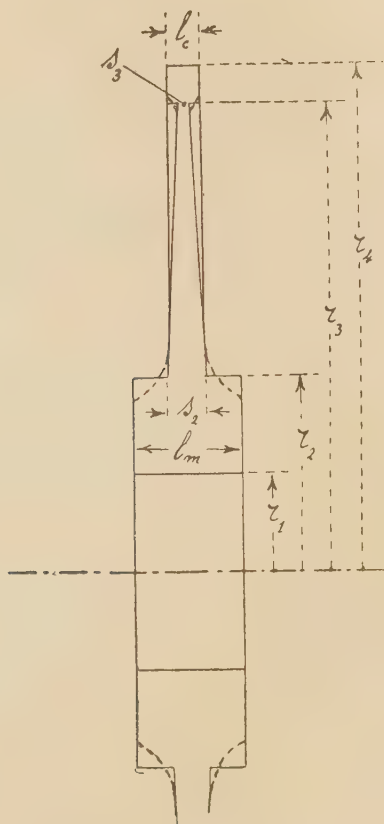



Fig. 2.

Il progetto preliminare d' una ruota a disco di uniforme resistenza sviluppato sui dati fondamentali d'una ruota a profilo empirico esemplificata dal Baer (l. c.) fornisce, con riferimento alla fig. 2, i seguenti valori delle dimensioni geometriche

$r_1 = 8{,}0$ cm ; $r_2 = 16{,}0$ cm ; $r_3 = 38{,}4$ cm ; $r_4 = 41{,}4$ cm
$l_c = 2{,}6$ cm ; $s_3 = 0{,}9$ cm ; $s_2 = 3{,}0[9589]$ cm ; $l_m = 8{,}8[0189]$ cm

Detta ruota, prevista in acciaio, onde $m = 10/3$ e $\eta = 8 \cdot 10^{-6}$ kg sec^2/cm^4,

fu calcolata per le seguenti condizioni

$$\begin{array}{ll} n_0 = 6000 & \text{giri/sec} \\ t_0 = 220 & \text{kg/cm}^2 \\ p_0 = 50 & \text{»} \\ \sigma_0 = 1557{,}43 & \text{»} \end{array}$$

In essa N risulta 0,74750 e la tensione ideale di massimo valore assoluto in tutta la ruota, a regime, che è quella tangeziale $E\varepsilon_t$ nelle fibre più interne del mozzo, risulta di 2261,38 kg/cm². Le molte cifre decimali che si vedono qui sopra adoperate, e spesso anche in seguito, hanno, quando sembrano eccessive, l'unico scopo di rendere più sicuro e soddisfacente il controllo del calcolo numerico e della sua intrinseca approssimazione, dato che di questa dovremo, sia pur sommariamente, occuparci.

Poichè dovremo parlare di velocità periferiche u, di tensioni reali σ e ideali $E\varepsilon$ con riferimento, secondo l'occorrenza, al disco, alla corona, al mozzo, o all'albero, applicheremo a questi simboli, nei vari casi, rispettivamente gl'indici d, c, m, a, preceduti se bisogna da uno degli indici e, i, secondo che il simbolo stesso abbia riferimento alla superficie esterna o interna dell'elemento costruttivo e quindi di raggio r_e o r_i; anche al simbolo k del rapporto r_e/r_i apporremo, ove occorra, uno degl'indici c, m, a. Altre volte troveremo più comodo l'uso degl'indici 1, 2, 3, 4, per riferire il simbolo alla superficie cilindrica di raggio rispettivamente r_1, r_2, r_3, r_4

Per determinare a_0 e b_0 nel caso della ruota individuata, cominceremo a porre $z = 1$, e quindi $Nz = 0{,}7475$, nella (33), ottenendo

$$\sigma_{red} = -2{,}131a_0 + 3{,}593b_0 + 1557{,}43 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \text{kg/cm}^2 \qquad (36)$$

A questo punto capita opportuna una breve digressione a proposito dell'errore su cui ritorneremo poi, sempre più brevemente ancora, qualche altra volta in seguito. Osserviamo in proposito che nella (36) il coefficiente di a_0 è la A_r calcolata per $z = 1$ fino al termine in $(Nz)^8$ e che in essa l'errore complessivo dovuto alla sola parte riguardante i termini nelle potenze positive di Nz, quantunque maggiore che in tutte le altre A o B calcolate o da calcolarsi, resta dell'ordine dei millesimi. Ciò non ostante, se non riesce di fastidio, conviene come è noto conservare la terza cifra decimale per sopprimerla poi magari in fondo a tutti i calcoli.

L'errore complessivo di cui sopra è la somma di quello dovuto alla soppressione dei termini nelle potenze superiori e che, nel caso, non supera certamente in valore assoluto 0,00018 e quello dipendente dal modo in cui furono eseguite le operazioni aritmetiche e che, nel caso, non supera in valore assoluto 0,0025. Si vede così che l'errore aritmetico può

ben facilmente rendere praticamente superfluo l'estendere il calcolo a molti termini della serie: per alcune delle A e B calcolate, abbiamo trovato sufficientissimo arrestarci al termine in $(Nz)^3$.

Essendo alquanto temibile l'errore aritmetico, specie per forti valori di N, nonchè per $z = 1$ o prossima ad 1, crediamo opportuno esporre il procedimento da noi adottato per la serie precedente ridotta ad un polinomio del tipo

$$y_8 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_8 x^8$$

con le a arrotondate alla terza decimale e la x supposta arrotondata alla quarta. Abbiamo, infatti, calcolato prima $y_1 = a_8 x + a_7$ arrotondando in ultimo alla quarta decimale, poi successivamente $y_2 = y_1 x + a_6$, $y_3 = y_2 x + a_5, \dots y_8 = y_7 x + a_0$ arrotondando volta per volta sempre alla quarta decimale che è stata soppressa solo nel valore finale y_8, corrispondente alla A_r su riportata. Procedendo a questo modo, il calcolo di y_8 viene a richiedere 8 moltiplicazioni in luogo delle 15 necessarie col calcolo separato delle potenze. Inoltre, procedendo analogamente nel caso più generale d'un polinomio completo di grado n, l'errore che si può commettere se il valore assoluto di quello comune ai coefficienti si indica con δa e quello riferibile alla x con δx, sarà, in valore assoluto e per quanto consente di affermarlo l'approssimazione dipendente dal trattare δa e δx come piccolissimi, inferiore a

$$\frac{d}{dx}(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n)\,\delta x + \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}(\delta a + \delta x) + x^n \delta a$$

Quando all'errore dovuto al troncamento della serie, è sempre possibile, nel nostro caso, valutarne l'ordine di grandezza mediante il noto metodo del paragone con una serie geometrica.

Ritornando alla determinazione delle a_0 e b_0, poniamo ora nella (33) $z = (16/38{,}4) = 0{,}1736$ ottenendo

$$\sigma_{rid} = 3{,}526 a_0 + 1{,}241 b_0 + 1557{,}4 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{kg/cm}^2 \qquad (37)$$

e, ricorrendo alla (35), troviamo analogamente

$$E\varepsilon_{ted} = -3{,}281 a_0 + 1{,}242 b_0 + 1090{,}2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{kg/cm}^2 \qquad (38)$$

$$E\varepsilon_{tid} = -8{,}436 a_0 + 0{,}764 b_0 + 1090{,}2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{»} \qquad (39)$$

Applicando al mozzo le note formole dei dischi forati, rotanti a spes-

sore uniforme, [1]) si può scrivere

$$E\varepsilon_{tem} = \frac{0,7k_m^2+1,3}{k_m^2-1}\,t_{em} - \frac{2}{k_m^2-1}\,t_{im} + \mu u_{em}^2\left(0,175+\frac{0,825}{k_m^2}\right) \quad \text{kg/cm}^2 \quad (40)$$

in cui i valori numerici dipendono dal rapporto del Poisson assunto come innanzi, t_{em} e t_{im} sono le tensioni di trazione applicate sulle superficie cilindriche rispettivamente esterna ed interna, u_{em} la velocità periferica sulla detta superficie esterna.

Porremo allora nella (40)

$$k_m=2 \quad , \quad \mu u_{em}^2 = 8.10^{-6}\left(\frac{\pi}{30}\,6000\cdot 16\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = 808,518\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \text{kg/cm}^2$$

Per la t_{em}, in base alla nota semplificazione che si suol introdurre già in sede di progetto, porremo

$$t_{vm} = \frac{s_2}{l_m}\,\sigma_{rid} = 0,35173\,\sigma_{rid} \qquad \text{kg/cm}^2$$

Quando alla t_{im}, essa deve essere eguale, salvo il segno, alla pressione che, alla velocità ω, l'albero ed il mozzo si scambiano tra loro. Quale che sia questa pressione p, il che equivale a non fare alcuna ipotesi circa la misura del forzamento della ruota sull'albero, potremo scrivere, evidentemente, $t_{im} = -50\,p/p_0$ kg/cm².

Per le espressioni passate in rassegna e per la (37), la (40) diviene

$$E\varepsilon_{tem} = 1,695a_0 + 0,596b_0 + 1056,9\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{100}{3}\,\frac{p}{p_0} \quad \text{kg/cm}^2 \quad (41)$$

Ma i primi membri della (39) e della (41), rappresentando tensioni ideali omonime per lo stesso valore r_2 del raggio, dovranno, per la continuità della ruota, essere eguali; onde, sottraendo per membri le menzionate espressioni, si ha

$$10,131a_0 - 0,167b_0 - 33,3\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{100}{3}\,\frac{p}{p_0} = 0 \qquad (42)$$

---

[1]) Queste formole sono le (48a) e (49a) da cui è facile ricavare $E\varepsilon_t$ e quindi $E\varepsilon_{te}$ che applicata al mozzo dà la (40), ovvero $E\varepsilon_{ti}$ che applicata alla corona dà la (43). Alla loro volta, le (48a) e (49a), cui conferimmo la forma più comoda con le tensioni ai limiti in vista, si ottengono per $m = 10/3$ da due espressioni frequentemente riportate (V. ad es. G. Belluzzo, l. c. pag. 117; C. Bach e R. Baumman, Elasticità e resistenza dei materiali, Hoepli, 1928, pag. 680; ecc.) nelle quali, tuttavia, sono da determinarsi le costanti d'integrazione ponendo $\sigma_{re} = t_e$ e $\sigma_{ri} = t_i$.

che è una prima equazione in cui, oltre alle due incognite a_0 e b_0, compaiono soltanto i due rapporti tra loro indipententi ω/ω_0 e p/p_0 che considereremo come due parametri ai quali ci sarà permesso, in seguito, di attribuire i valori che meglio ci piacerà. La (42) è perciò una prima equazione della quale potremo servirci per esprimere le due costanti d'integrazione in funzione dei detti parametri.

Analogamente, per la corona si ha

$$E\varepsilon_{tic} = \frac{2k_c^2}{k_c^2 - 1} t_{ec} - \frac{0,7 + 1,3k_c^2}{k_c^2 - 1} t_{ic} + \mu u_{ec}^2 \left(0,825 + \frac{0,175}{k_c^2}\right) \text{kg} / \text{cm}^2 \quad (43)$$

in cui dev'essere, intendendo le pressioni in kg/cm²,

$$t_{ec} = t_0 = 220 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad , \quad t_{ic} = \frac{s_3}{l_c} \sigma_{red} = 0,34616\, \sigma_{red}$$

$$k_c^2 = (r_4/r_3)^2 = 1,1624 \quad , \quad \mu u_{ec}^2 = 8 \cdot 10^{-6} \left(\frac{\pi}{30} 6000 \cdot 41,4\right)^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

onde

$$E\varepsilon_{tic} = 10,043\, a_0 - 16,935\, b_0 + 1090,2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{kg} / \text{cm}^2 \qquad (44)$$

Ma ancora qui i due primi membri delle (38) e (44) debbono ritenersi eguali; onde, sottraendo per membri,

$$11,324\, a_0 - 18,177\, b_0 = 0 \qquad (45)$$

che è la seconda equazione occorrente per la ricercata espressione delle costanti a_0 e b_0,

Poichè le (42) e (45) sono state ricavate operando su valori numerici, giova chiarire a fondo due fatti. Il primo riguarda la (42) ed è che il coefficiente $-33,3$ di $(\omega/\omega_0)^2$ non dipende in alcun modo dai coefficienti delle serie in quanto, se le operazioni si fossero eseguite sui simboli, al suo posto, come è facile verificare, si sarebbe trovata la seguente espressione nella quale con u_{emo} indichiamo la u_{em} per $\omega = \omega_0$:

$$\frac{0,7\, k_m^2 + 1,3}{k_m^2 - 1} \frac{s_2}{l_m} \sigma_0 + \mu u_{emo}^2 \left(0,175 + \frac{0,825}{k_m^2}\right) - 0,7\, \sigma_0$$

che agevolmente si dimostra dover eguagliare $-2p_0/(k_m^2 - 1)$ vale a dire $-100/3$: non è quindi casuale che nella (42), salvo un piccolo errore numerico, risultino eguali in valore assoluto i coefficienti di $(\omega/\omega_0)^2$ e di p/p_0. Il secondo fatto riguarda la (45) ed è che neppure casuale va ritenuta l'assenza di ω/ω_0 da tale equazione. Il coefficiente di questo rapporto, nella(44),

vale infatti, indicando con u_{eco} la u_{ec} per $\omega = \omega_0$,

$$\frac{2}{k_c^2 - 1} t_0 - \frac{0{,}7 + 1{,}3 k_c^2}{k_c^2 - 1} \frac{s_3}{l_c} \sigma_0 + \mu u_{eco}^2 \left(0{,}825 + \frac{0{,}175}{k_c^2}\right)$$

necessariamente eguale a quel $0{,}7\sigma_0$ che sta a coefficiente del medesimo rapporto nella (38).

Il sistema (42), (44) si potrà dunque scrivere

$$\begin{aligned} 10{,}131\, a_0 - 0{,}167\, b_0 &= \frac{100}{3} \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{p}{p_0}\right] \quad \text{kg/cm}^2 \\ 11{,}324\, a_0 - 18{,}177\, b_0 &= 0 \end{aligned} \qquad (46)$$

in cui solo i coefficienti di a_0 e di b_0 vanno riguardati come affetti da errori numerici, che del resto insieme ai sistematici non superano di certo pochi millesimi.

Notiamo intanto che i coefficienti di a_0 e di b_0 non dipendono, come si vede senza stento, da nessuna delle quantità p ed ω e perciò la seconda delle (46) basta a mostrare che *in una data ruota a disco d'uniforme resistenza le costanti d'integrazione contenute nelle espressioni delle tensioni interne del disco stanno in un rapporto costante, indipendente dal regime effettivo e dalle condizioni di montaggio.*

Dalle (46) si cava subito

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 3{,}324 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{p}{p_0}\right] \quad \text{kg/cm}^2 \\ b_0 &= 2{,}071 \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{p}{p_0}\right] \quad \text{»} \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Queste, sostituite nelle (32), che giova considerare sempre come una forma tachigrafica delle (33) e (34), dànno, con l'aggiunta di un indice nei primi membri,

$$\sigma_{rd} = (3{,}324\, A_r + 2{,}071\, B_r) \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{p}{p_0}\right] + \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{kg/cm}^2 \qquad (48)$$

$$\sigma_{td} = (3{,}324\, A_t + 2{,}071\, B_t) \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{p}{p_0}\right] + \sigma_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{»} \qquad (49)$$

che già risolverebbero in maniera definitiva il problema della distribuzione delle tensioni, e quindi anche delle deformazioni, nel disco ed in tutta la ruota, qualora questa non dovesse esser montata su di un albero e noi potessimo nullameno farla girare ad una qualsiasi velocità desiderata, applicando contemporaneamente una qualsiasi pressione sulla superficie in-

terna del mozzo. Assegnati, infatti, ad arbitrio due valori p, ω, nelle rimanenti parti della ruota si avrebbe

$$\sigma_r = \frac{k^2 - \frac{r_e^2}{r^2}}{k^2 - 1} t_e - \frac{1 - \frac{r_e^2}{r^2}}{k^2 - 1} t_i + 0{,}4125\left(1 + \frac{1}{k^2} - \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{r^2}{r_e^2}\right)\mu u_e^2 \tag{48a}$$

$$\sigma_t = \frac{k^2 + \frac{r_e^2}{r^2}}{k^2 - 1} t_e - \frac{1 + \frac{r_e^2}{r^2}}{k^2 - 1} t_i + \left[0{,}4125\left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{r_i^2}{r^2}\right) - 0{,}2375\,\frac{r^2}{r_e^2}\right]\mu u_e^2 \tag{49a}$$

nell'intesa che, alle quantità k, t_e, t_i, μu_e^2, si attribuissero per la corona e per il mozzo rispettivamente le espressioni già fornite di k_c, t_{ec}, t_{ic}, μu_{ec}^2 e di k_m, t_{em}, t_{im}, μu_{em}^2.

Lo stesso accadrà nel caso che la ruota venga montata a forzamento su di un albero, con la sola differenza che, scelte allora e stabilite le condizioni di montaggio, cioè il tipo dell'albero e la misura del forzamento, scompare evidentemente la simultanea arbitrarietà della p e della ω, bastando attribuire un valore ad ω perchè rimanga determinato anche quello di p.

Resta di fatto che, il sistema (48), (49), (48a), (49a), nel primo caso da solo, nel secondo caso con l' aiuto d' una relazione tra p ed ω. che ci occorrerà trovare, risolve il problema della distribuzione delle tensioni nell' intera ruota.

Or, anche prima d' aver rintracciata la relazione testè prevista, si presentano alcune utili osservazioni.

Anzitutto risulta dall'esame delle (48), (49), (48a), (49a) e delle espressioni che in quest'ultime due assumono t_e e t_i, che *nell'intera ruota, quali si siano le condizioni di regime, ogni tensione reale o ideale (cioè anche ogni deformazione) è la somma di due tensioni (o deformazioni) di cui una proporzionale al quadrato della velocità angolare e l'altra alla pressione che, alla medesima velocità, mutuamente si trasmettono l' albero ed il mozzo.*

Questa proposizione, che qui si presenta come uno scolio, è in sè un teorema, atto anche ad una sollecita estensione, il quale afferma l' esistenza, nelle tensioni e nelle deformazioni dell'intera ruota, d'una proprietà che risale alla sovrapponibilità degli stati d' equilibrio nei riguardi della inerzia e della pressione p applicata dall'esterno: ci farà comodo indicare questa proprietà con l'appellativo conciso di *separabilità in parti proporzionali* a p e ad ω^2.

Le espressioni (48) e (49) mostrano poi nel modo più evidente che per

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{p}{p_0} = 0 \tag{50}$$

si ha, indipendentemente da r, $\sigma_r = \sigma_t = \sigma_a \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \sigma_0 \frac{p}{p_0}$; vale a dire che, in tal caso, la ruota si trova a funzionare in *regime di uniforme resistenza*.

Poichè ciò si verifica con assoluta indipendenza dalla particolarità del caso sottoposto ad esame, si giunge alla conclusione che *una ruota a disco d'uniforme resistenza, progettata per funzionare come tale per la coppia di valori p_0, ω_0, può funzionare nello stesso caratteristico modo anche per tutte le infinite coppie di valori p, ω che soddisfino la (50)*, cominciando così a chiarirsi la riserva espressa tra parentesi al quinto capoverso dopo la formola (2).

Per questa ragione chiameremo la (50) *condizione del regime d'uniforme resistenza*.

Nello stabilire le (47) non si è fatta alcuna ipotesi circa le peculiarità dell'albero e circa la misura del forzamento della ruota su di esso; ma si é già accennato che se p ed ω sono due valori di regime per una ruota a montaggio forzato, essi non possono essere indipendenti. Ricerchiamo ora, introducendo appunto le dette condizioni di montaggio, la relazione che deve intercedere tra p ed ω affinchè questi valori possano coesistere nella ruota per un tempo illimitato, caratterizzando così un regime. Questa relazione, possiamo stabilirlo fin d'ora, noi chiameremo per p ed ω, *condizione di coesistenza a regime* e la via che seguiremo per rintracciarla ci permetterà frattanto altre constatazioni.

Allo scopo, dunque, cominciamo col calcolare

$$E\varepsilon_{tim} = \frac{2k_m^2}{k_m^2 - 1} t_{em} - \frac{0,7 + 1,3\,k_m^2}{k_m^2 - 1} t_{im} + \mu u_{em}^2 \left(0,825 + \frac{0,175}{k_m^2}\right) \qquad (51)$$

che si ottiene applicando al mozzo la stessa formola che, applicata alla corona, diede la (43). Ponendo per t_{cm}, t_{im}, μu_e^2 le stesse espressioni che consentirono il passaggio dalla (40) alla (41), la (51) diventa

$$E\varepsilon_{tim} = 0,9379\,\sigma_{rid} + 98,33 \frac{p}{p_0} + 702,4 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \quad \text{kg/cm}^2 \qquad (52)$$

che per la (37) fornisce

$$E\varepsilon_{tim} = 2176,51 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 84,93 \frac{p}{p_0} \quad \text{kg/cm}^2 \qquad (53)$$

Si noti incidentalmente, che questa relazione tiene tuttora per qualsiasi valore di p e di ω e quindi pure per p_0 ed ω_0, nel qual caso si ha per $E\varepsilon_{tim}$ il valore di 2261,44 kg/cm² denunciando, principalmente a causa delle decimali soppresse, un errore di soli 0,06 kg/cm² rispetto a quello riferito in principio come risultante dal progetto.

Passando adesso all'albero, supporremo che questo ammetta lo stesso modulo d'elasticità normale della ruota, essendo semplicissimo vedere cosa accade in caso contrario. Diremo allora che la tensione ideale $E\varepsilon_{tea}$ nell'albero si potrebbe calcolare approssimativamente mediante la stessa formola che, già applicata al mozzo, ci servì per ricavare la (40). Tuttavia, apporteremo in essa una lieve modifica sostituendo $0,143 + 0,857 / k_a^2$ alla quantità che vi compare in parentesi e ciò per tener conto che, essendo l'albero ordinariamente lungo parecchie volte il diametro, alla distanza dagli estremi a cui suole capitare la ruota le sezioni rimangono piane [1]).

In realtà neanche con questa sostituzione, valida per $m = 10/3$ e che trasforma la formola relativa al disco nella formola relativa all'albero, si può dire evitata ogni causa d'errore; ma solo perchè l'albero non suole essere abbracciato e stretto, per tutta la sua lunghezza, dal mozzo. Pur non di meno, questa residua causa di errore fortunatamente scompare nell'occasione più importante ove, come vedremo, la p si annulla.

Applicando la formola modificata nel modo anzidetto, si ha

$$E\varepsilon_{tea} = \frac{0,7\,k_a^2 + 1,3}{k_a^2 - 1}\,t_{ea} - \frac{2}{k_a^2 - 1}\,t_{ia} + \left(0,143 + \frac{0,857}{k_a^2}\right)\mu u_{ea}^2 \quad (54)$$

in cui è da porre, oltre il k_a che compete all'albero,

$$t_{ea} = -50\frac{p}{p_0}\ \mathrm{kg/cm^2} \quad ; \quad t_{ia} = 0 \quad ; \quad u_{ea} = \frac{u_{em}}{k_m}$$

Se l'albero non è forato, facendo nella (54) tendere k_a all'infinito, si ottiene

$$E\varepsilon_{ta} = 0,7\,t_{ea} + 0,143\,\mu u_{ea}^2 \quad (55)$$

Incidentalmente: tenendo conto delle espressioni che testè abbiamo veduto competere alla t_e ed alla t_i, e tenendo conto che le tensioni nell'albero sono in generale espresse dalle stesse (48a) e (49a) tutt'al più modificate esclusivamente nei valori numerici che compaiono nei coefficienti di u_e^2, si vede che anche nell'albero, e quindi, *nell'intero sistema ruota-albero vige, per tutte le tensioni e deformazioni, la separabilità in parti proporzionali* a p e ad ω^2.

Supponendo intanto che l'albero sia pieno, e ricorrendo quindi alla (55), si ha, per i valori indicati,

$$E\varepsilon_{ta} = 28,9\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 35\,\frac{p}{p_0}\quad \mathrm{kg/cm^2} \quad (56)$$

---

[1]) Si provi, infatti, di svolgere un procedimento analogo a quello cennato per rintracciare le (48a) e (49a), ma imponendo la condizione ε_a = costante.

Non si stenta, d'altra parte, a riconoscere che l'eccesso del diametro dell'albero sul diametro del mozzo, realizzato in lavorazione, è un valore costante a cui in ogni caso deve necessariamente restare eguale, appena eseguito il montaggio e per qualunque velocità non superiore a quella che diremo di scalettamento, la differenza tra la deformazione totale del diametro interno del mozzo e la deformazione totale del diametro esterno dell'albero. E poichè, per la piccolezza del nominato eccesso, alle deformazioni totali di cui sopra possono ritenersi proporzionali rispettivamente quelle unitarie tangenziali ε_{tim} ed ε_{tea}, indicando con **C** una costante numerica, deve aversi pure, in tutto il cennato campo di velocità,

$$\varepsilon_{tim} - \varepsilon_{tea} = \mathbf{C} \qquad (57)$$

Ricordando, a questo punto, la separabilità delle deformazioni in parti proporzionali ed ω^2 ed a p, dimostrata per l'intero sistema ruota-albero, si riconosce immediatamente che la (57), quali che siano le condizioni di regime e di forzamento, si potrà sempre porre sotto la forma

$$\mathbf{H}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathbf{K}\,\frac{p}{p_0} = \mathbf{C} \qquad (57a)$$

in cui **H** e **K** si potranno esprimere senz'altro in base a ciò che abbiamo esposto e la **C**, indicando con Θ l'eccesso di diametro conferito all'albero ai fini del forzamento, varrà $\Theta/2r_1$. Le **H** e **K** risulteranno due costanti adimensionali dipendenti solo dalle caratteristiche geometriche e meccaniche della ruota e dell'albero e per nulla dalla misura del forzamento, laddove da quest'ultimo dipenderà il valore della terza costante adimensionale **C**.

Potremo dunque chiamare **H** e **K**, rispettivamente *la prima e la seconda costante adimensionale del sistema ruota-albero* assegnato e la **C** *la costante adimensionale di forzamento.*

Allo scopo pratico di semplificare anche di poco la scritturazione degli sviluppi, conviene considerare, come faremo in tutto quel che segue e definite costanti moltiplicate per E, pur conservando loro gli stessi appellativi con la sola sopressione della qualifica di adimensionale. Perciò scriveremo la (57a)

$$H\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + K\,\frac{p}{p_0} = C \qquad (58)$$

che equivale a

$$E\varepsilon_{tim} - E\varepsilon_{tea} = C \qquad (58a)$$

Dalla (58), calcolati i valori di H e di K per un dato sistema, asse-

gnando a C un valore arbitrario si ricaverà immediatamente la misura del forzamento; ovvero, nota una coppia p, ω di regime in corrispondenza di un forzamento incognito, si ricaverà immediatamente il valore di C.

In qualunque modo si sia determinato il valore di C, la (58) diventa la ricercata relazione tra p ed ω che abbiamo chiamata condizione di coesistenza a regime; infatti tutte le coppie p, ω capaci di coesistere a regime nel dato sistema dovranno soddisfarla.

Così determinata, *la (58), insieme con le (18), (19), (18a), (19a) darà, per ciascun valore della velocità, la distribuzione delle tensioni in tutta la ruota*, per le assegnate condizioni di montaggio. Giudicando che in pratica possa non valere la pena di modificare gli ultimi termini delle ultime due, onde ricavare informazioni sufficienti sulle tensioni nell'albero (se non per $p = 0$, nel qual caso il sistema si dissolve cessando d'esistere come tale), si può dire che le cinque relazioni su riferite sono sufficienti a dare la distribuzione delle tensioni in tutto l'intero sistema ruota-albero.

Notevolissima appare l'utilità pratica della (58) e per il numero e per l'importanza dei problemi tecnici di cui permette la diretta soluzione con un esattezza che può dirsi *praticamente* assoluta (specie per quanto riguarda la velocità di scalettamento, come presto vedremo), non solo perchè in tutta la nostra trattazione niuna nuova ipotesi semplificativa è stata introdotta, ma anche perchè le conseguenze di quella contenuta nel progetto circa la distribuzione della σ_r nelle sezioni d'attacco del disco con le parti limitrofe non possono giungere sensibili fino alla superficie interna del mozzo, cosa che è intuitiva se la ruota fu bene progettata, cioè con un k_m non troppo piccolo, e dato che la ricordata ipotesi rispetta pienamente le condizioni d'equilibrio dei corpi rigidi. D'altronde, nessuna relazione, o sistema di relazioni, sotto forma finita, risultano conosciuti, salvo ignoranza individuale di chi scrive, che, nel caso delle ruote in argomento, sia capace di altrettanto.

L'importanza fondamentale della (58), avvalorata dalla rinvenuta maniera di calcolare H e K, non diminuisce in quei casi pratici nei quali la precisione dei suoi risultati potesse eventualmente apparire superflua al confronto di quella offerta da metodi più spicci, magari ricavabili da questa stessa trattazione, giacchè ad essa risalirebbe ancora il merito d'aver consentito un sicuro giudizio sull'approssimazione di tali metodi più spicci, senza del quale ogni calcolo non ha valore.

Per venire subito ad un esempio d'impiego della (58), supponiamo che la nostra ruota a dati concreti venga montata su di un albero pieno: per le (53) e (56), la (58) diviene

$$2147{,}61\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 119{,}93\,\frac{p}{p_0} = C \quad \text{kg/cm}^2 \qquad (59)$$

Se assegniamo a C un valore arbitrario C_1, il forzamento da questo

richiesto si ottiene predisponendo, in lavorazione, un' eccedenza del diametro dell' albero su quello del mozzo misurata da

$$\theta = 2r_1 \frac{C_1}{E} \qquad (60)$$

Se invece vogliamo conoscere il valore di C corrispondente al forzamento che realizza il regime di progetto, basterà fare in modo che la (59) sia soddisfatta per $\omega = \omega_0$ e $p = p_0$; onde

$$2147{,}61 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 119{,}93 \frac{p}{p_0} = 2267{,}54 \quad \mathrm{kg} / \mathrm{cm}^3 \qquad (61)$$

Ci capiterà, in prosieguo, d' imporre ancora un' altra tra le svariate condizioni che possono presentarsi per la determinazione di C.

Uscendo novellamente dal caso specifico, possiamo qui trarre altre conclusioni d'indole generale. Se, mediante la (50), eliminiamo il rapporto p/p_0 dalla (58), constatiamo che ad ogni valore determinato di ω ne corrisponderà un'altro anch'esso determinato di C. È vero dunque, come dicemmo, che *una ruota a disco di uniforme resistenza ammette infinite velocità di uniforme resistenza, ma a ciascuna di esse corrisponde una particolare condizione di forzamento*. Ed ancora, da un altro punto di vista: *una ruota a disco di uniforme resistenza, montata sul proprio albero con un forzamento che non realizzi le condizioni di progetto, ammetterà parimenti una ed una sola velocità di uniforme resistenza, ma diversa da quella di progetto*. Rimane così perfettamente chiarito quanto, a mano a mano, siamo andati rilevando a questo proposito.

La (58), per $\omega = 0$, fornisce la *pressione di montaggio* e per $p = 0$, la *velocità di scalettamento* che rimane contemporaneamente definita e che indicheremo col simbolo ω_s.

La conoscenza del rapporto ω_s/ω_0, permette di risalire ad una preziosa valutazione della sicurezza dell'esercizio contro uno dei più gravi pericoli derivanti da eccesso di velocità; benché, per un momento di rado assente e per ogni causa di vibrazione, spostamenti relativi tra le superficie accoppiate dell' albero e del mozzo si verifichino anche prima che sia raggiunta la ω_s.

Quanto al pericolo dell' eccesso di velocità, occorre tener presente non soltanto il caso accidentale dell'incantarsi dei sistemi di protezione (di solito dovuto all' inspessimento dell' olio per cattiva qualità o per abbandono) senza che il personale di conduzione faccia in tempo ad intervenire con le necessarie manovre a mano; ma ancora il caso abbastanza frequente di certe prove di collaudo in cui da alcuni si vorrebbe, inconsideratamente, veder mandate le giranti a velocità molto più alte di quelle di esercizio.

Qualora il mozzo di una ruota più non si stringa in misura sufficiente intorno all' albero, anche se non possano derivarne spostamenti tali che conducano la ruota stessa, o la palettatura, in contatto con organi fissi ed anche se, per la presenza di una bietta o altro dispositivo, siano impedite rotazioni relative con la conseguente possibilità di forti sbilanciamenti, resta sempre l'eventualità che la ruota, nelle sue nuove condizioni vincolari, entri in vibrazioni di ampiezza altrimenti esclusa. Or è certo che, nel caso delle turbine a vapore, le vibrazioni d'una ruota comportano facilmente dei contatti tra parti fisse e mobili con caratteri tra cui in generale prevale o quello dell' urto, o quello del semplice strisciamento. Il fenomeno può, nel primo caso, dato il preesistente stato di tensione nel materiale rotante, non solo condurre a fratture ed avarie inizialmente localizzate, ma anche determinare l' immediata esplosione per inerzia di tutta la ruota; nel secondo caso, invece, sogliono prodursi quantità di calore tanto ingenti, per cui il dilatarsi dei diaframmi e di altre parti fisse può provocare, come talvolta ha provocato in un sol minuto ed anche meno, la rottura della cassa stessa della turbina. Ciascuno di quest' incidenti non è, evidentemente, che l'inizio di una sequela più o meno rapida che può estendersi fino alle conseguenze estreme.

Vero è che, nelle turbine a vapore, un'altro grave pericolo di scalettamento accompagna le differenze di temperatura che insorgono tra ruota ed albero, specie all'avviamento, per insufficiente rispetto delle prescritte cautele; ma, anche nei riguardi di quest' altra minaccia, la conoscenza d'un valore degno di fede per il *rapporto di scalettamento a temperatura uniforme*, come possiamo chiamare l' ω_s / ω_0 che si ricava dalla (58), è tutt'altro che destituita d'interesse in quanto è ovvio che, al crescere del detto rapporto, coeteris paribus, cresce pure la sicurezza contro lo scalettamento per puro effetto termico. Del resto, le deformazioni termiche, come è noto, si calcolano a parte e si sommanno alle altre.

A proposito dell'approssimazione con cui si riesce a calcolare il ripetuto rapporto mediante la (58), si noti che nullo è l' errore più temibile, quello dipendente dal fatto che il mozzo ordinariamente non abbraccia e comprime l' albero per l' intera sua lunghezza, dato infatti che la ω_s si verifica per $p = 0$.

Vale la pena, qui giunti, e cioè prima di passare ad altri esempi numerici molto istruttivi nel campo delle cose anzidette, porre in luce ancora alcune proprietà generali delle ruote in questione e che si traggono appunto dalla (58). Una di esse è che *in una data ruota a disco di uniforme resistenza, il rapporto tra la velocità di scalettamento e quella di uniforme resistenza, l'una e l'altra relative allo stesso forzamento su di un determinato albero, è indipendente da questo forzamento e resta quindi un valore caratteristico del sistema ruota-albero assegnato.*

Infatti, assegnare un sistema ruota-albero significa assegnare le co-

stanti del sistema H e K, ed assegnare un certo grado di forzamento significa attribuire anche alla costante di forzamento C, nella (58), un valore determinato: or se ω_1 è la velocità di uniforme resistenza relativo al forzamento definito da C_1, dalle (50) e (58) si cava

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2 = \frac{C_1}{H+K}$$

ma, per la velocità di scalettamento ω_{s1}, sempre relativa al forzamento C_1, la (58) fornisce

$$\left(\frac{\omega_{s1}}{\omega_0}\right)^2 = \frac{C_1}{H}$$

onde, dividendo per membri,

$$\left(\frac{\omega_{s1}}{\omega_1}\right)^2 = \frac{H+K}{H}$$

la quale dimostra l'assunto.

Dall'ultima relazione è poi facile desumere che *se ω_1 ed ω_{s1} sono rispettivamente la velocità d'uniforme resistenza e quella di scalettamento d'un sistema ruota-albero assegnato e corrispondenti allo stesso grado di forzamento, qualunque sia questo, rappresentando nei due cateti d'un triangolo rettangolo le due velocità ω_1 ed $\omega_1 \sqrt{K/H}$ si ottiene rappresentata nell'ipotenusa la ω_{s1}*. È chiaro che, per lo stesso sistema, tutti questi triangoli sono simili tra loro; onde basta costruirne un solo che potrà servire per tutti i gradi di forzamento.

In tema di rappresentazioni grafiche, si può osservare che, per la (58) e per la (50) *assumendo come coordinate cartesiane i rapporti p/p_0 ed $(\omega/\omega_0)^2$, tutti i possibili regimi di un sistema sono rappresentati dall'insieme dei punti di un fascio di segmenti paralleli (ciascuno per ogni grado di forzamento) con gli estremi sugli assi, nei punti rappresentativi dei rapporti di scalettamento e dei rapporti delle pressioni di montaggio: i regimi di uniforme resistenza saranno sulla bisettrice dell'angolo degli assi.*

Ritornando a quanto dicevamo più innanzi, ricordiamo che, nel caso della ruota da noi portata ad esempio, se montata su albero pieno e nel modo previsto in progetto, vale la (61). Ponendo in questa $\omega = 0$, si ottiene il valore, a prima vista notevole, di 945 kg/cm² per la pressione di montaggio; ponendovi, invece, $p = 0$, se ne cava il rapporto di scalettamento

$$\frac{\omega_s}{\omega_0} = 1{,}0275$$

da cui risulta che la pressione tra mozzo ed albero svanisce appena la velocità supera del solo 2,75 % quella di progetto, qui assunta anche per

velocità di esercizio. Non è azzardato affermare che un simile incremento della velocità si verificherebbe certamente in quasi tutte le turbine esistenti, e non ostante i regolatori, per una repentina scomparsa del carico.

Questo risultato, relativo ad un caso che in fatto di dati rimane nel campo delle usuali realizzazioni, non manca di destare una certa sorpresa in quanto conferma e chiarisce quasi all' improvviso quella facilità dello scalettamento per puro eccesso di velocità che fu non poche volte constatato e, purtroppo, raramente a buon mercato di danni materiali ed anche di vite umane.

Giova inoltre verificare che, pur ricorrendo ad un albero cavo, a meno che non si salga per k_a tanto in alto da dover fare i conti con la resistenza dell' albero e più ancora con il forte abbassamento delle velocità critiche, non si ha sempre grande vantaggio. Adottando, infatti, al posto della (55), la (54) con $k_a = 2$ e ripetendo i calcoli si trova

$$\frac{\omega_s}{\omega_0} = 1,0334$$

Appare pertanto chiaro da queste verifiche che la pressione di progetto $p_0 = 50$ kg/cm², riportata troppo spesso anche in esempi di testo [1]) come un valore normale, può riuscire invece molto scarsa.

È certo che ricorrere a valori molto forti di p_0 non va sempre senza fastidi, sia per l'incremento della tensione ideale $E\varepsilon_{lim}$ di massimo valore assoluto in tutta la ruota, sia per il decremento del rapporto s_2/l_m che rende meno agevole il raccordo del disco col mozzo; ma ciò non toglie che, almeno in parecchi casi si può, appunto per questa via, evitare l'adozione d'uno di quei svariati sistemi, tutti più o meno costosi, diretti ad assicurare più efficacemente la ruota all'albero ed escogitati dalla tecnica costruttiva sotto il rude ammaestramento dell' esperienza. Ciò finirà di presentare dei rischi se, volta per volta, si ricorrerà ad una precisa valutazione, e non ad un apprezzamento sommario, del rapporto ω_s/ω_0. In questa verifica occorrerà, naturalmente, assicurarsi che $E\varepsilon_{lim}$, nella previsione che essa rimanga la tensione id. di mass. v. a. anche alla velocità di scalettamento, non oltrepassi a tale velocità il limite pratico di proporzionalità del materiale, onde il valore rintracciato per ω_s/ω_0 non risulti illusorio.

Portando, ad esempio, p_0 a 250 kg/cm² senza variare altro nelle proporzioni geometriche della nostra ruota che il rapporto s_2/l_m, la velocità di scalettamento, pur seguitandosi ad adottare l' albero pieno, supererà di

[1]) Zietemann, *Berechnung u. Konstruktion der Dampfturbinen.* Springer 1930, pag. 221 e pag. 222; Rötscher., *Maschinenelemente.* Springer 1929, pag. 1320; Stodola (*l. c.*) pag. 323; ecc.

circa il 14,7 % quella di progetto e d'esercizio ω_0, mentre la $E\varepsilon_{tim}$ di esercizio salirà da 2261 a 2395 kg/cm², valore ammissibilissimo in questo genere di costruzioni e per gli ottimi acciai speciali che vi si impiegano: unica conseguenza non gradita, ma neppure tragica, sarà il ridursi di s_2/l_m a 0,29 il che renderà un pò più ardito il raccordo tra disco e mozzo, Non dovrà sembrare strano che la pressione di montaggio salirà da 945 a soli 1045 kg/cm², visto che col ridursi di s_2/l_m il mozzo si sarà allungato del 21 %. Infine, si avrà $\theta/2r_1 = 0{,}00115$ onde, pel montaggio, basterà riscaldare la ruota (o raffreddare l'albero) d'un centinaio di gradi. Nell'eventuale verifica del valore testè attribuito ad ω_s/ω_0 per $p_0 = 250$ kg/cm² si tenga presente che occorre rintracciare novelli valori per a_0 e b_0.

In ultimo, ci sembra utile occuparci brevemente d'un'altra applicazione che gioverà ad allargare ancora un poco di più le nostre conoscenze intorno alla ruota in oggetto: cercheremo d'indagare che cosa accadrebbe in una ruota già costruita con le condizioni p_0, ω_0 di progetto qualora, lasciandole ω_0 per velocità di esercizio, si decidesse di montarla sull'albero portato a diametro tale da risultarne un forzamento più energico di quello preveduto in progetto; in queste condizioni, ω_0 non risulterà più, come sappiamo, velocità di uniforme resistenza.

Riferendoci, per ovvie ragioni, allo stesso esempio di ruota del quale ci siamo ripetutamente serviti, quello con $p_0 = 50$ kg/cm², supporremo di utilizzare un albero pieno ed un forzamento tale da ottenere una $E\varepsilon_{tim}$ d'esercizio di 2600 kg/cm².

Ricaveremo allora, giusta le ipotesi, dalla (53)

$$\frac{p}{p_0} = 4{,}986 \tag{62}$$

che, sostituita nella (59), ancora per $\omega = \omega_0$, fornisce $C = 2746$ kg/cm² a cui corrisponde $\omega_s/\omega_0 = 1{,}131$: per la pressione di esercizio, si ha $\div$ 250 kg/cm² come nel caso precedente.

Un breve paragone tra la ruota calcolata per $p_0 = 250$ kg/cm² e mandata alla velocità di progetto, con l'altra calcolata per una p_0 cinque volte più piccola e mandata alla stessa velocità, ma montata in modo che la pressione di esercizio riesca eguale a quella di progetto dell'altra, mostra che in entrambi i casi si ha quasi lo stesso rapporto di scalettamento riferito alla velocità d'esercizio (rispettivamente 1,14 ed 1,13); tuttavia, nella prima, la $E\varepsilon_{tim}$ di esercizio è sensibilmente minore (2395 contro 2600 kg/cm²).

Se, poi, tra la (59) con $C = 2746$ kg/cm² e la (50), si elimina p/p_0, si trova che, nel secondo caso, la ruota ammette una velocità di uniforme resistenza pari a 1,10 ω_0 e quindi, alla velocità di esercizio ω_0, essa si troverà a funzionare di sotto alla velocità di uniforme resistenza corrispondente al proprio montaggio. Or, a farsi un'idea della nuova distribu-

zione che assumono le tensioni nel disco della ruota a tale regime, basterà calcolare i valori di A_r, B_r, A_t, B_t per soli quattro valori del raggio, e quindi di z, comprendendovi gli estremi $z = 1$, per la sezione d'attacco alla corona e $z = 0{,}1736$ per l'altra d'attacco al mozzo. Servendosi degli sviluppi contenuti nelle (33) e (34), si trova:

z	A_r	B_r	A_t	B_t	r (cm)
1,00	$-2{,}1310$	3,5933	$-3{,}9291$	2,3199	38,4
0,64	$-0{,}5490$	2,2460	$-4{,}2896$	1,6363	34,6
0,36	$+0{,}6808$	1,5692	$-5{,}6697$	1,3137	23,0
0,1736	$+3{,}5255$	1,2408	$-9{,}1563$	1,1358	16,0

In virtù della (62), il fattore contenuto nelle parentesi quadre delle (48) e (49) acquista, per $\omega = \omega_0$, il valore $-3{,}986$; onde, queste due ultime relazioni, con l'aiuto dei valori del precedente specchietto, permettono di compilare l'altro:

z	σ_r (kg/cm²)	σ_t (kg/cm²)	r (cm)
1,00	$\sigma_0 - 1{,}43$	$\sigma_0 + 32{,}90$	38,4
0,64	$\sigma_0 - 11{,}27$	$\sigma_0 + 43{,}32$	34,6
0,36	$\sigma_0 - 21{,}97$	$\sigma_0 + 64{,}27$	23,0
0,1736	$\sigma_0 - 56{,}95$	$\sigma_0 + 111{,}92$	16,0

Ricordando che è $\sigma_0 = 1557$ kg/cm^2, si vede che la distribuzione delle tensioni nel disco non rimane gran fatto disturbata dall'essersi assunta una pressione di esercizio quintupla di quella di progetto ed è facile arguire che la $E\varepsilon_{lim}$ di esercizio, cui fu imposto il valore di 2600 kg/cm^2, seguiti ad essere la tensione ideale di mass. v. a. in tutta le ruota.

Espressioni semplificate

Fra le relazioni innanzi acquisite si annuncia, come già notato, d'impiego diretto e frequente nelle applicazioni quella che abbiamo chiamata

la condizione di coesistenza a regime

$$H\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + K\frac{p}{p_0} = C \tag{58}$$

La forma di questa relazione è certamente molto semplice; pur non di meno, il calcolo delle costanti H e K si appoggia alle fondamentali (33) e (34) di natura trascendente e per di più richiede la determinazione delle a_0 e b_0. Ora, benchè tutto ciò appaia un giuoco di fronte alle difficoltà che altrimenti occorrerebbe superare per risolvere anche uno solo dei problemi che la (58) scioglie all'istante, si avrebbe di sicuro un'ulteriore sensibilissima semplificazione se, accontendandosi naturalmente di risultati approssimati ed almeno in vista dell'applicazione più importante qual'è quella che riguarda la velocità di scalettamento, si riuscisse a svincolare il calcolo delle menzionate costanti di un qualsiasi sitema ruota-albero da quanto abbia riferimento con le (33) e (34).

Cerchiamo, a questo scopo, di scrivere per esteso la (58a) nella sua forma generale e cominciamo con l'osservare che, ponendo

$$t_{em} = \frac{s_2}{l_m}\sigma_{rid} \quad , \quad t_{im} = -p_0\frac{p}{p_0} \quad , \quad u_{em} = u_{emo}\frac{\omega}{\omega_0}$$

la (51) diviene:

$$E\varepsilon_{tim} = \frac{2k_m^2}{k_m^2-1}\frac{s_2}{l_m}\sigma_{rid} + p_0\frac{0{,}7+1{,}3k_m^2}{k_m^2-1}\frac{p}{p_0} + \mu u_{emo}^2\left(0{,}825+\frac{0{,}175}{k_m^2}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tag{63}$$

Indicando con A_{ri} e B_{ri} i valori di A_r e B_r per z corrispondente all'attacco del disco al mozzo, la (37) si può scrivere

$$\sigma_{rid} = A_{ri}a_0 + B_{ri}b_0 + \sigma_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

che, sostituita nella precedente, fornisce

$$E\varepsilon_{tim} = \left[\frac{2k_m^2}{k_m^2-1}\frac{s_2}{l_m}\sigma_0 + \mu u_{emo}^2\left(0{,}825+\frac{0{,}175}{k_m^2}\right)\right]\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + p_0\frac{0{,}7+1{,}3k_m^2}{k_m^2-1}\frac{p}{p_0} +$$
$$+ \frac{2k_m^2}{k_m^2-1}\frac{s_2}{l_m}(A_{ri}a_0 + B_{ri}b_0).$$

La (54) poi, ponendo

$$t_{ea} = -p_0\frac{p}{p_0} \quad , \quad t_{ia} = 0 \quad , \quad u_{ea} = \frac{u_{em}}{k_m} = \frac{u_{emo}}{k_m}\frac{\omega}{\omega_0}$$

diviene

$$E\varepsilon_{ta} = \mu' u_{emo}^2 \left(\frac{0,143}{k_m^2} + \frac{0,857}{k_m^2 k_a^2}\right)\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - p_0 \frac{0,7k_a^2 + 1,3}{k_a^2 - 1} \frac{p}{p_0}$$

che, per sottrazione dalla precedente, dà alla (58a) la forma:

$$\left[\frac{2k_m^2}{k_m^2-1}\frac{s_2}{l_m}\sigma_0 + \mu u_{emo}^2\left(0,825+\frac{0,032}{k_m^2}-\frac{0,857}{k_m^2 k_a^2}\right)\right]\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{2p_0(k_m^2 k_a^2-1)}{(k_m^2-1)(k_a^2-1)}\frac{p}{p_0} +$$

$$+ \frac{2k_m^2}{k_m^2-1}\frac{s_2}{l_m}(A_{ri}a_0+B_{ri}b_0) = C$$

È chiaro che, se supponiamo di poter trascurare in questa relazione l'ultimo termine del primo membro, avremo per H e per K le due espressioni approssimate

$$H^* = \frac{2k_m^2}{k_m^2-1}\frac{s_2}{l_m}\sigma_0 + \left(0,825 + \frac{0,032}{k_m^2} - \frac{0,857}{k_m^2 k_a^2}\right)\mu u_{emo}^2$$

$$K^* = \frac{2p_0(k_m^2 k_a^2 - 1)}{(k_m^2-1)(k_a^2-1)}$$

che si adattano al caso dell'albero pieno facendovi tendere k_a all'infinito.

Tenendo ora presente che, per la (47), le a_0 e b_0 sono della forma

$$a_0 = \alpha\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \alpha\frac{p}{p_0}$$

$$b_0 = \beta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \beta\frac{p}{p_0},$$

si ha che il termine più sopra soppresso si può scrivere

$$\frac{2k_m^2}{k_m^2-1}\frac{s_2}{l_m}(A_{ri}\alpha + B_{ri}\beta)\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \frac{p}{p_0}\right] = \Delta\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - \Delta\frac{p}{p_0}$$

e quindi si vede che l'effettuata soppressione conduce alla conseguenza che H^* e K^* riescono entrambe approssimate della stessa quantità

$$\Delta = \frac{2k_m^2}{k_m^2-1}\frac{s_2}{l_m}(A_{ri}\alpha + B_{ri}\beta)$$

la prima per difetto di Δ, la seconda per eccesso di Δ.

Il valore della costante di forzamento va dunque, in qualsiasi caso, esente da ogni errore, anche se calcolata mediante i valori approssimati

H^* e K^*; giacchè, scegliendo il regime di uniforme resistenza, risulta verificata la (50) e di più

$$H^* + K^* = H + K$$

Si noti intanto che il procedimento da noi seguito per rintracciare le esposte espressioni approssimate delle costanti del sistema, equivale a sostituire a σ_{rid}, nella (63), il suo valore approssimato $\sigma_0 (\omega / \omega_s)^2$.

Se ora indichiamo con C_0 il valore di C corrispondente al forzamento che realizza il regime di progetto, l'espressione

$$\left(\frac{\omega_s}{\omega}\right)^* = \sqrt{\frac{C_0}{H^*}} \qquad (64)$$

ci darà un valore approssimato del rapporto di scalettamento e, poichè Δ sembra riuscire ordinariamente abbastanza piccolo di fronte ad H, sembra pure che la (64) possa rendere buoni servigi. Si ricorderà poi che lo stesso secondo membro della (64), senza alcuna sostituzione di C_0, dà anche il rapporto tra la velocità di scalettamento e quella di uniforme resistenza entrambe relative allo stesso grado di forzamento, *qualunque* sia questo è non soltanto quello preveduto in progetto.

Tuttavia, atteso che non è utile alcun calcolo di cui s'ignori l'approssimazione, l'uso della (64) gioverà solo quando si tratterà di applicarla entro l'ambito di un gruppo di casi non molto dissimili tra loro e per alcuni dei quali si siano già eseguiti i calcoli esatti, di maniera che, in tutto il gruppo, risulti chiaro l'ordine di gradezza assunto dall'errore.

Nel primo dei casi concreti innanzi esaminati, quello per $p_0 = 50$ kg / cm², si ha in cifre tonde, $\Delta = 57$ kg / cm²

$$H = 2148 \text{ kg/cm}^2 \qquad K = 120 \text{ kg/cm}^2 \qquad \frac{\omega_s}{\omega_0} = 1,0275$$

$$H^* = 2091 \text{ kg/cm}^2 \qquad K^* = 177 \text{ kg/cm}^2 \qquad \left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^* = 1,0358$$

ed, in quello per $p_0 = 250$ kg / cm², ancora e circa $\Delta = 57$ kg / cm²

$$H = 1931 \text{ kg/cm}^2 \qquad K = 609 \text{ kg/cm}^2 \qquad \frac{\omega_s}{\omega_0} = 1,147$$

$$H^* = 1874 \text{ kg/cm}^2 \qquad K^* = 666 \text{ kg/cm}^2 \qquad \left(\frac{\omega_s}{\omega_0}\right)^* = 1,164$$

Nel caso di $p_0 = 50$ kg | cm², ma con forzamento tale da ottenere la pressione d'esercizio di 250 kg / cm² alla velocità ω_0, i valori su riportati

pel rapporto di scalettamento tengono perfettamente, purchè si interpretino come riferiti alla velocità d'uniforme resistenza corrispondente al nuovo forzamento, velocità che è risultata circa $1{,}10\,\omega_0$, Gli stessi valori quindi, moltiplicati per 1,10, daranno il rapporto di scalettamento riferito alla velocità di esercizio.

Conclusione

Tutti i pregi della ruota a disco di uniforme resistenza accennati nelle premesse non sono, tranne uno, doti esclusive di essa : si può anzi affermare che altre ruote la superano talora in questo, talora in quello e con ciò, non rare volte, riescono ad imporsi nella scelta del costruttore.

Per non divagare in una vasta discusstone meritevole d' essere condotta a parte, ci è stato impossibile, tanto in questa nota, quanto in quella citata, indugiarci in un esauriente paragone tra i diversi tipi di ruote più o meno adatti alle alte velocità. Crediamo, pur tuttavia, d'interpretare un'opinione largamente condivisa con l'affermare che ogni qualvolta si è costretti a lasciare da parte la ruota a disco di uniforme resistenza per adottarne un'altra di altro tipo, la decisione si prende sempre a malincuore : perchè il pregio veramente esclusivo di tale ruota, quello che da solo basterebbe a spiegare buona parte del suo diffusissimo impiego, è la facilità di redigerne il progetto in base alle condizioni di esercizio.

Si comprende quindi quanto dovesse rincrescere, come dicevamo in principio, che la facilità di prevedere con sicurezza confermata dall'esperienza ciò che di praticamente interessante accade nella menzionata ruota, si limitasse ad una particolarissima condizione del funzionamento ; mentre fuori di questa, per mancanza di un'adeguata soluzione analitica, restava estremamente disagevole fare un poco di sicura luce, ad onta che fra tante cose probabilmente notevoli una ve n' era di certo, e d' importanza paragonabile a quella dello stesso progetto : la velocità di scalettamento.

Sul valore di questa velocità, per la ragione su riferita, le idee di troppi tecnici non poterono finora essere precise abbastanza da evitare sempre e nello stesso tempo sia il pericolo del disastro, sia l' onere, talvolta superfluo, di costose precauzioni costruttive. Nel tentar di penetrare nel funzionamento della nostra ruota normalmente montata sul proprio asse, ci si trovava difatti come innanzi ad un unico fotogramma d'una lunga scena e nella quasi impossibilità materiale di osservarne qualche altra parte.

Quello, ora, che in questa nota abbiamo esposto ci sembra rendere d'ogni grandezza desiderata stretto conto e misura, in qualsiasi sistema qualunque sia il regime e qualunque sia la condizione di forzamento ; ci sembra pure che permette di abbracciare con uno sguardo solo l' intero campo dei fenomeni, tanto attraverso espressioni analitiche di chiara forma finita, quanto nella semplicissima visualizzazione geometrica che ne deriva.

Alla velocità di scalettamento rimane attribuito un valore non più circondato di perplessità e di incertezze, ovvero premio d'una fatica dalla gravosità sconcertante e solitamente proibitiva, inoltre compaiono numerose proprietà della ruota studiata che potranno eventualmente trovare dirette o indiretta utilizzazione pratica.

Ad una prima e sollecita verifica di tutto questo, il lettore potrà saltare la seconda parte, che pur contiene la chiave delle successive deduzioni a quanto pare per la prima volta compiutamente modellata, a limitarsi a scorrere ciò che riguarda le applicazioni, anzi quello che ivi segue la determinazione delle costanti d'integrazione.

Catalogo di 166 stelle a forte moto proprio da osservazioni meridiane al Cerchio di Repsold

Memoria del prof. **Eugenio Guerrieri**

(presentata dal socio L. Carnera nell'adunanza del dì 3 aprile 1937 - XV per l'inserzione nel vol. I, serie 3ª, degli Atti)

Sunto. — Nell'introduzione si fa cenno del Cerchio Meridiano adoperato e delle sue diverse parti; della scelta delle Stelle di Catalogo e del metodo di osservazione; dei valori delle costanti strumentali e della marcia del pendolo di Riefler, con i rispettivi diagrammi del loro andamento durante il periodo delle osservazioni; dei valori angolari di una parte della livella e del passo delle due viti micrometriche; delle serate di osservazione, dal 24 aprile 1924 al 22 giugno 1925, con le temperature e le pressioni barometriche; delle stelle fondamentali e della discussione sui residui V_α e V_δ delle α e δ stelle orarie e di catalogo.

Seguono tre parti distinte, ciascuna con le relative tabelle.

Nella parte I (osservazioni e riduzioni) sono esposti i risultati delle osservazioni meridiane e le riduzioni per dedurne l'ascensione retta e la declinazione delle stelle per il 1924.0 e per il 1925.0.

Nella parte II (posizioni singole per serata e loro medie) sono registrate, separatamente per ogni stella, le posizioni singole ottenute nelle diverse serate, con l'epoca corrispondente e le relative medie.

La parte III infine contiene il Catalogo delle stelle.

Sul progetto preliminare d'una ruota a disco d'uniforme resistenza.

Nota del Prof. **Raffaele Tarantini,** *presentata dal socio* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 11 novembre 1939 - XVIII)

Sunto. — Pel progetto preliminare d'una ruota a disco di uniforme resistenza, si espone un procedimento sistematico di calcolo analitico che riduce, in un col numero dei tentativi, il tempo ed il lavoro necessari, pur applicando nella loro intera generalità, alla corona ed al mozzo, le formole dei dischi rotanti di spessore uniforme.

Premesse

Di quella interessante categoria di ruote che presenta, tra mozzo e corona, una parte discoidale di spessore s variabile, legato al raggio r dalla relazione

$$s = s_0 \, e^{-\frac{\mu\omega^2}{2\sigma_d} r^2} \tag{1}$$

(ove s_0 è lo spessore del disco completo per $r=0$, e la base dei logaritmi naturali, μ la densità del materiale, ω la velocità angolare di regime, σ_d il valore che, alla menzionata velocità, assumono in comune tutte le tensioni interne parallele al piano del moto) lo scrivente ebbe a trattare in un'altra nota [1]) che, riguardando specificamente le verifiche per condizioni diverse da quelle di regime, presuppose l'esistenza del solito progetto eseguito in base alle condizioni di regime, e non si occupò quindi minimamente di esso, quantunque parecchio vi fosse da dire sul modo migliore di mandarlo a termine.

Il progetto d'una ruota appartenente alla precisata categoria, (ruota detta comunemente *a disco di uniforme resistenza,* benchè il tipo di disco che vi figura non sia il solo a meritare tale qualifica) se eseguito in base alle sole condizioni di regime e senza scendere a particolari. come ad esempio il sistema d'attacco per una eventuale palettatura, sarà qui indicato col nome di *progetto preliminare.*

La via analitica più comunemente seguita per redigere un tal progetto senza ricorrere a ripieghi talvolta eccessivamente semplicistici è quella di ammettere alcune ipotesi semplificative che consentono di applicare alla

---

[1]) « *Sulla ruota a disco di uniforme resistenza fuori del regime di progetto* ». (V questo stesso Vol. del Rendiconto).

corona ed al mozzo la teoria dei dischi rotanti di spessore uniforme, con foro cilindrico coassiale e soggetti, in ciascuna delle superficie limiti, a tensione esterna normale uniforme. Si giunge per questa via, come è noto, a progettare una ruota d'un sol pezzo in cui possono, ciò non ostante, distinguersi tre parti: un mozzo, una corona (entrambi a sezioni meridiane rettangolari) ed un elemento discoidale del tipo definito dalla (1), così proporzionate che, in ciascuna delle due superficie cilindriche ove due delle dette parti s'incontrano presentando, naturalmente, spessori differenti nel senso dell'asse, ognuno di queste ultime, pensata alla velocità di regime e idealmente isolata, manifesti un allungamento unitario tangenziale uguale a quello dell'altra, nell'ipotesi semplificativa che, anche nella menzionata superficie d'incontro, la tensione radiale di ciascuna parte conservi, per tutta l'estensione dello spessore, un unico valore il quale deve poi, per ovvia ragione d'equilibrio, risultare inversamente proporzionale allo spessore medesimo.

Con ciò, i calcoli concernenti il progetto trovano a disposizione relazioni analitiche ben note e non troppo complicate, sicchè non sembrerebbe ch'essi potessero offrire difficoltà degne di nota anche dal punto di vista di una corrente applicazione, tenuto conto, beninteso, dell'importanza e della delicatezza dell'organo da costruire. Se non che, non solo necessità accessorie, ma ancora e per altro verso le stesse semplificazioni adottate, impongono cautele e condizioni supplementari tali, da rendere impossibile la soluzione diretta del problema ed inevitabile quindi una per tentativi.

Ora, il procedimento comunemente seguito a questo scopo si riduce, in sostanza, alla scelta di quella che meglio pare rispondere al caso tra parecchie soluzioni, talora molte, rintracciate cercando di soddisfare, senza un metodo in vero convenientemente preordinato, numerose condizioni di carattere disparatissimo e presentanti zone d'interferenza tanto più ampie ed imbarazzanti quanto più ardita è la costruzione da realizzare. Ne consegue che, specie in caso d'esigenze prossime al limite delle possibilità pratiche, non sempre si riesce ad andare verso una soluzione giusta per lo meno con la rapidità e la sicurezza desiderabili, ancor quando con simili progetti si abbia una certa familiarità. Chi poi questa familiarità non può mantenere con un costante esercizio, ben sa quanto indaginoso si dimostri un compito apparentemente tanto semplice e si rende conto con facilità del perchè, non di rado, s'incontrino ruote che potevano essere meglio concepite.

È sembrato quindi un complemento molto utile, se pur modesto, alla nota innanzi citata, la ricerca d'una metodica risoluzione del problema pratico costituito dal ripetuto progetto preliminare. Or, queste pagine si propongono per l'appunto di esporre, con un minimo di richiami alle cose note, un procedimento il quale, presentando con opportuno ordine tutte le svariate condizioni da soddisfare, evita che ne possa anche tempora-

neamente sfuggire qualcuna e, permettendo un continuo orientamento, conduce allo scopo attraverso un numero ristrettissimo di tentativi.

Valga detto, frattanto, nel modo più esplicito ed una volta per tutte, che il progetto preliminare di cui si va trattando è, per le semplificazioni contenute, uno di quei tanti mezzi d'approsimazione di cui il tecnico è costretto a servirsi, in mancanza di meglio e sospinto dalla incoercibile necessità della realizzazione; la quale non s'arresta punto là dove muore il prezioso binario dell'assoluto rigore scientifico, ma prosegue spesso ben oltre lungo l'altro binario, almeno per un tratto discretamente sicuro, dell'apprezzamento fine ed esperto. Sapersi servire di simili mezzi e saperli sempre più perfezionare forma, come è noto, una caratteristica della tecnica costruttiva che, sembra allo scrivente, le consente di sopravvanzare, in un certo modo, le stesse scienze esatte. Nella specie, il procedimento che ci accingiamo ad esporre non sana le mende insite nell'impostazione medesima del problema, nè presume dettar norme che del tutto eliminino il bisogno d'una sufficiente perizia del progettista, ma coopera nello stesso senso con l'agevolare la ricerca di quelle proporzioni che delle cennate mende rendono tollerabili gli effetti, come presto spiegheremo.

Prima di passare all'annunziata esposizione, è necessario riassumere un pò più minutamente il problema ed, a fine d'una maggiore generalità, piuttosto che prendere in considerazione un caso semplice quale, ad esempio, quello d'un volante di motore veloce, ci riferiremo ad una ruota di turbina a vapore riportata sull'albero.

In questa, la palettatura è sede, a regime, d'un effetto d'inerzia assifugo che, in via semplificativa, si ritiene equivalente ad una trazione t_0 uniforme su tutta la superficie cilindrica esterna della corona; di più, sempre a regime, l'albero, in conseguenza della tensione di montaggio, tende a dilatare il mozzo con una pressione p_0, ancora in via semplificativa, uniforme su tutta la superficie di mutuo accoppiamento.

Queste due ultime ipotesi semplificative completano le condizioni per cui, in qualsiasi punto tanto del mozzo che della corona, le tensioni principali risultano perfettamente conosciute coincidendo con quelle che si destano dei dischi di spessore uniforme più sopra ricordati.

È facile porre le note espressioni delle tensioni principali nei detti dischi, sotto le forme seguenti [1]), comode per l'uso che capiterà di doverne fare,

$$\sigma_t = t_e \frac{k^2 + \frac{r_e^2}{r^2}}{k^2 - 1} - t_i \frac{\frac{r_e^2}{r^2} + 1}{k^2 - 1} + \frac{33}{80} \mu u_e^2 \left(1 + \frac{1}{k^2} + \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{19}{33} \frac{r^2}{r_e^2}\right) \ldots (2)$$

[1]) Tali espressioni si ricavano per $m = 10/3$ da altre frequentemente riportate, (Vedi, ad es, G. BELLUZZO: *Le turbine a vapore*, Hoepli 1923, Vol. II, pag. 117, C. BACH e R. BAUMANN: *Elasticità e resistenza dei materiali*, Hoepli 1928, pag. 680 ecc.) determinandovi le costanti d'integrazione col porre $\sigma_{re} = t_e$ e $\sigma_{ri} = t_i$.

$$\sigma_r = t_e \frac{k^2 - \frac{r_e^2}{r^2}}{k^2 - 1} + t_i \frac{\frac{r_e^2}{r^2} - 1}{k^2 - 1} + \frac{33}{80} \mu u_e^2 \left(1 + \frac{1}{k^2} - \frac{r_i^2}{r^2} - \frac{r^2}{r_e^2}\right) \quad \ldots (3)$$

In queste, i coefficienti numerici dipendono dal rapporto $1/m$ del Poisson, assunto per l' acciaio pari a 0,3; σ_t è la tensione principale, che diremo *tangenziale*, parallela alla velocità lineare dell' intorno che si considera e che dista di r dall'asse di rotazione; σ_r, che diremo tensione *radiale*, è la tensione principale (normale quindi a σ_t) normale all'asse di rotazione; r_e

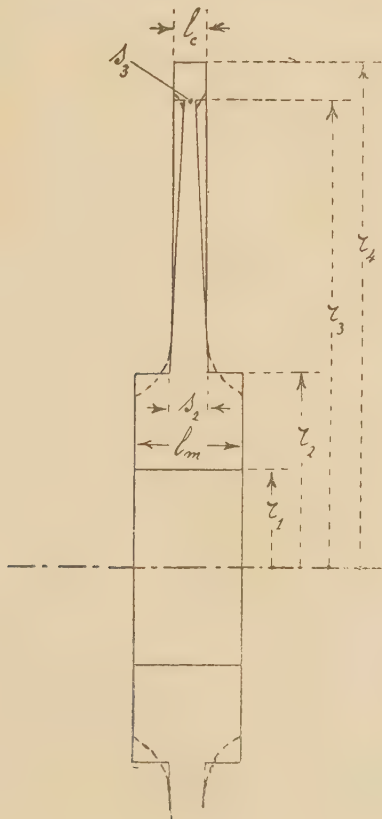



Fig. 1.

ed r_i sono rispettivamente i raggi esterno ed interno del disco forato; k il rapporto r_e / r_i; t_e e t_i sono le *trazioni* esterne applicate rispettivamente alle superficie di raggi r_e ed r_i e quindi di valore eguale a σ_{re} e σ_{ri}, cioè ai valori che prende σ_r rispettivamente per $r = r_e$ e per $r = r_i$; μ la densità del materiale di cui è fatta la ruota; u_e la velocità lineare sulla superficie esterna, cioè $u_e = \omega r_e$ se con ω s' intende la velocità angolare di regime.

In un intorno qualsiasi della parte discoidale intermedia tra il mozzo e la corona, e che diremo brevemente *disco*, si ha, a regime,

$$\sigma_t = \sigma_z = \sigma_d \tag{4}$$

con σ_d costante, per cui tutte le tensioni parallele al piano del moto sono le tensioni normali relative ai piani paralleli all'asse di rotazione e posseggono tutte il comune valore σ_d.

Quanto alla terza tensione principale σ_a che nell'intera ruota, salvo speciale sistema di fissaggio del mozzo sull'albero, si ritiene eguale alla sola pressione del vapore, sarà senz'altro trascurata per la sua piccolezza rispetto alle rimanenti. Sarà poi di già apparso chiaramente convenuto che tensioni di valore positivo sono le trazioni.

Poichè, intanto, occorrerà spèsso usare gli stessi simboli, ora con riferimento alla corona, ora al mozzo o al disco, sarà occasionalmente provveduto ad una comoda distinzione mediante rispettivamente gl'indici c, m, d,

Quanto alle unità di misura, troviamo conveniente tacerle, dato che tutte le relazioni espresse valgono per un qualsiasi sistema di unità meccaniche nel quale, ovviamente, quelle derivate non siano affette da coefficienti numerici.

Altri simboli che aiuteranno l'esposizione sono quelli chiariti dalla figura che rappresenta parte di una sezione meridiana della ruota con i raccordi accennati a trattini. Anche gl'indici 1, 2, 3, 4 renderanno utili servigi per contraddistinguere i simboli: così, ad esempio, con u_4 potremo indicare la velocità ωr_4.

Si sogliono considerare dati del problema: μ, ω, r_1, r_4, $t_{ec} = t_0$, $t_{im} = -p_0$ ed il carico di sicurezza $\varkappa$ del materiale; incognite gli elementi geometrici $r_2, r_3, l_c, l_m, s_2, s_3$, più tutte le altre grandezze che compaiono nelle condizioni che passiamo ad esprimere concisamente.

Osserviamo, intanto, che di r_3 ed l_c, dimensioni riguardanti la corona, essendosi dovuto procedere ad un progetto di massima della palettatura e del suo ancoramento, sogliono esser noti per l'appunto dei valori di massima, o meglio un limite superiore per r_3 ed uno inferiore per l_c.

Per prima condizione si può considerare la (1) che, mentre lega s_2 ed s_3 con la σ_d, definisce il profilo della ruota tra r_2 ed r_3.

La condizione che tanto la corona che il disco presentino lo stesso allungamento unitario tangenziale ε_t, in corrispondenza del raggio r_3, si scrive

$$\varepsilon_{tic} = \varepsilon_d \tag{5}$$

Poichè, intanto, per valore conferito ad *1/m*, è

$$\varepsilon_d = \frac{1}{E}\left(\sigma_d - \frac{\sigma_d}{m}\right) = \frac{0{,}7}{E}\sigma_d$$

con E modulo di elasticità normale, la (5) si può scrivere anche

$$E\,\varepsilon_{tic} = 0{,}7\,\sigma_d \qquad (5\ \text{bis})$$

La condizione che, nella stessa superficie cilindrica individuata da $r = r_3$, le σ_r debbono essere inversamente proporzionali agli spessori si scrive

$$l_c\, t_{ic} = s_3\, \sigma_d \qquad (6)$$

Le condizioni analoghe alle (5) e (6), ma relative alla superficie di raggio r_2, si scrivono

$$\varepsilon_{tem} = \varepsilon_d \qquad (7)$$

ovvero

$$E\,\varepsilon_{tem} = 0{,}7\,\sigma_d \qquad (7\ \text{bis})$$

e

$$l_m\, t_{em} = s_2\, \sigma_d \qquad (8)$$

Per condizione di resistenza si può assumere, come dimostreremo,

$$E\,\varepsilon_{tim} \leqq \varkappa \qquad (9)$$

A queste condizioni se ne aggiunge subito un'altra molto importante. È noto che la (1) si ricava supponendo, in ciascuna sezione cilindrica, assenti le tensioni di taglio ed uniformi quelle tangenziali e radiali; questa ipotesi, che si trova molto soddisfacentemente verificata nei dischi a sezione meridiana piuttosto schiacciata nel senso dell'asse, conduce ad una approssimazione troppo grossolana quando il disco risulta molto panciuto, vale a dire quando alcuni dei piani tangenti alla sua superficie si scostano notevolmente dalla giacitura normale all'asse. Affinchè l'approsimazione possa soddisfare, si dimostra esser necessario che il logaritmo naturale λ del rapporto s_0/s_3 non superi 2,5.

Ma, con questa, le condizioni non sono punto esaurite giacchè, oltre ad alcune evidentissime e facili da soddisfare, come $s_3 < l_c$ ed $s_2 < l_m$, c'è da badare che s_3 sia quanto più piccolo è possibile per la leggerezza di tutta la costruzione pur restando abbastanza grande per permettere un buon raccordo con la corona e sopratutto per assicurare alla ruota una robustezza sufficiente alla lavorazione ed al trasporto; che il rapporto s_2 / l_m sia abbastanza alto affinchè il raccordo tra mozzo e disco non comporti un' eccessiva alterazione del profilo impegnando una zona molto estesa nel senso radiale; che $k_m = r_2/r_1$ sia abbastanza grande affinchè, almeno sulla superficie interna del mozzo, resti trascurabile l'influenza dell'effettiva disuniformità della t_{em}.

Oltre tutte le condizioni finora enunciate e che diremo primarie, non ne mancano spesso altre di minore importanza delle quali si tien conto soltanto quando si può. Infatti, tenendo conto delle sole condizioni primarie e dato che alcune di esse può dirsi assegnino soltanto degli intervalli entro i quali debbono restare alcune delle variabili, si presentano in generale due casi: o esistono infinite soluzioni e non ne esiste nessuna. Nel primo caso, si ha un campo a molteplici dimensioni ciascun punto del quale rappresenta un gruppo di determinati valori delle variabili e dà luogo ad una soluzione: il progettista può limitarsi a sceglierne una verso il centro del campo, o può ricorrere a qualcuna di quelle condizioni secondarie, se ve ne sono, che restringono senza annullarlo il campo di risolubilità. Nel secondo caso, vanno ritenuti responsabili dell'insolubilità i particolari valori dei dati; ma dalla detta insolubilità non è certo lecito dedurre l'impossibilità di progettare una ruota d'altro tipo la quale eventualmente risponda allo scopo pratico che si vuol raggiungere; tale questione, tuttavia, è completamente fuori del nostro argomento.

A questo punto, invece, cade acconcia un'osservazione ordinariamente trascurata, ma che a noi sembra di grande importanza essendo indispensabile per chiarire come mai un progetto menato a termine sulla base di sì profonde semplificazioni dia poi pieno affidamento confermato dall'esperienza.

Considerando, invero, l'insieme dell' impostazione e della risoluzione del problema, non si stenta a riconoscere due ordini di fatti. Primo: le semplificazioni più profonde sono quelle che impongono delle distribuzioni arbitrarie alle tensioni negli attacchi della corona e del mozzo con l'interposto disco e, data la natura delle dette semplificazioni, riesce intuitivo che, proprio nelle regioni d'attacco, le tensioni calcolate debbano risultare più discoste da quelle reali. Ma, se nel progetto furono rispettate le condizioni prescritte, il cimento del materiale nelle precisate regioni suol apparire, attraverso gli stessi calcoli, di tanto inferiore a quello di qualche altra regione ben determinata, per quanto non v'è da temere, come l'esperienza conferma, che l'errore derivante dalle menzionate semplificazioni possa essere di tale entità da invertire addirittura il senso della cennata disuguaglianza. Secondo: la tensione di massimo valore assoluto si presenta nella superficie interna del mozzo dove, sempre che nel progetto siano state rispettate le condizioni prescritte, risulta manifestamente minima l'influenza delle semplificazioni su ricordate ed è trascurabile l'errore che ne deriva; d'altra parte, le conseguenze dell'errore derivante dall'aver supposto p_0 uniforme possono essere agevolmente superate dal proggettista al quale il cimento apparente sopportabile dal materiale viene con sicurezza indicato dalla pratica di numerosi casi consimili (mozzi in genere, anelli di forzamento, ecc.) nel cui calcolo la stessa ipotesi viene utilizzata.

Da questi fatti discende che, quantunque nella così detta ruota a disco di uniforme resistenza le tensioni vere non siano, in generale, quelle calcolate nel progetto preliminare, tuttavia la tensione di massimo valore assoluto (e quindi anche la deformazione di mass. v. a.) risulta determinata, con sicurezza ed approssimazione praticamente sufficienti, tanto nell'ubicazione quanto nella grandezza. Ciò chiarisce l'importanza e la fiducia che l'esperienza, in apparente contrasto con la grossolanità di alcune ipotesi, attribuisce rispettivamente alla ruota in questione ed alla descritta maniera, relativamente semplice e comoda, di progettarla.

Giudicato nel modo più severo, il progetto preliminare di cui ci andiamo occupando resta quindi un mezzo pratico di notevole utilità per giungere al proporzionamento d'una ruota che resista con sicurezza e nella quale il materiale si trovi distribuito in maniera che, se non sia proprio la più adatta che si possa immaginare, riesce certo soddisfacente in moltissime applicazioni.

Passando finalmente ad esporre il procedimento che forma lo scopo principale di queste pagine, crediamo opportuno fare in modo che chi abbia ad applicarlo non lo trovi diluito in troppe righe: esso comparirà perciò raccolto intorno ad asserti lasciati spesso senza giustificazione, ma accompagnati da numeri racchiusi in parentesi quadre e rimandanti a chiarimenti e dimostrazioni che seguiranno.

Procedimento

In una prima parte, si cerca di determinare le incognite r_3, l_c, s_3, σ_d, λ procedendo come segue.

Nell'espressione

$$\lambda = \frac{0{,}35\,(k_c^2 - 1) + (0{,}35 + 0{,}65\,k_c^2)\,s_3 / l_c}{2k_c^4 t_0 / \mu u_4^2 + (0{,}825\,k_c^2 + 0{,}175)\,(k_c^2 - 1)} \qquad (10)$$

si introducano per r_3 e per l_c rispettivamente il valore limite superiore e quello inferiore che discendono dal progetto della palettatura e del suo ancoraggio, sicchè nel secondo membro non resti da assegnare che la sola s_3.

Alla scelta d'un valore per s_3 presiedono svariati criteri. Si cerchi anzitutto di fare in modo che sia

$$\lambda < 2{,}5 \qquad (11) \qquad [1]$$

tenendo presente che, ovviamente, λ varia nello stesso senso di s_3. Che s_3 sia piccolo conviene anche per ottenere un profilo snello e quindi una ruota leggera: tuttavia non si può scendere al disotto di un certo limite, facile a giudicarsi, per non compromettere la resistenza della ruota du-

rante le operazioni di lavorazione, di trasporto e di montaggio. Di più, quanto meno s_3 si discosta da l_c tanto minore sarà anche lo scarto tra la effettiva tensione di massimo valore assoluto nella corona ed il valore che ne fornisce il calcolo, cosa questa che importa ai fini del progetto definitivo dell'ancoraggio della palettatura. Tuttavia, poichè l_c suol essere molto grande quando sulla stessa ruota sono montate più corone di pale, cosa che accade soltanto per velocità periferiche relativamente lontane dalle massime raggiungibili, si può, anzi si deve, in questi casi, assumere s_3 anche parecchie volte più piccolo di l_c. [2]

Per valori ordinari della velocità è agevole rintracciare un s_3 che soddisfi a tutti i requisiti; qualora, invece, si presentasse il caso che pur avendo assunto s_3 il più piccolo possibile, apparisse utile o necessario ridurre ulteriormente λ, si potrà spesso raggiungere lo scopo accrescendo l_c o k_c o entrambi i valori di queste grandezze [3]. È chiaro che, per accrescere k_c, non essendo lecito in generale alterare r_4 che è un dato, occorre diminuire r_3, cosa che, come pure l'incremento di l_c, suole facilitare la creazione di un robusto attacco della palettatura.

Si noti, intanto, che non sempre conviene ricercare valori di λ molto più piccoli del massimo stabilito dalla (11), anzi talvolta si è costretti ad avvicinarvisi notevolmente, giacchè al diminuire di λ, anche se vi si pervenga accrescendo k_c, segue un incremento della tensione

$$\sigma_d = \frac{\mu u_4^2}{2k_c^2\lambda} \qquad (12) \qquad [4]$$

laddove il valore di λ, per essere accettabile, deve anche condurre ad una σ_d che resti sensibilmente al di sotto del carico di sicurezza del materiale impiegato, dato che σ_d è di norma superato da σ_{tim}. [5]

Infine si tenga presente che ad ogni variazione Δs_3 di s_3 corrispondono variazioni di s_2 e di l_m dello stesso senso, ma in v. a. sensibilmente più grandi di Δs_3 [6] cosa importantissima deducendosene pure che, variando s_3 del $z\,{}^0/_0$, il peso dell'insieme mozzo-disco varia, in egual senso, molto più del $z\,{}^0/_0$.

Se non si riesce a soddisfare tutte le elencate condizioni, il problema è praticamente insolubile e ciò sarà da imputarsi all'eccessivo valore di $u_4 = \omega r_4$; se, al contrario, vi si riesce, quanto precede varrà a stabilire dei valori per r_3, l_c, s_3, λ, σ_d i quali saranno definitivi qualora la seconda parte della ricerca, quella riguardante le rimanenti grandezze, riuscirà anch'essa in maniera soddisfacente.

Sarà bene esservare che le quantità determinate come sopra già rispettano le condizioni (5) e (6), benchè non ricordate esplicitamente. [7]

La seconda parte della ricerca, che qui comincia, riguarda la determinazione delle rimanenti grandezze. A tal fine conviene considerare la

tensione interna di massimo valore assoluto che è la σ_{tim} anzi, meglio ancora che questa, la corrispondente tensione ideale che è ancora più grande e che, posto per semplicità di scrittura

$$k_m^2 - 1 = x \quad , \quad r_3/r_1 = \rho ,$$

si scrive

$$E\,\varepsilon_{tim} = \frac{2 + \left(2 + 1{,}3\,\frac{p_0}{\sigma_d}\right) x + 0{,}65\,\frac{\lambda}{\rho^2}\,x^2}{x + 2{,}857}\,\sigma_d , \qquad (13)$$

contemporaneamente al rapporto

$$\frac{s_2}{l_m} = \frac{-\frac{p_0}{\sigma_d} + \left(0{,}35 - \frac{\lambda}{\rho^2}\right) x - 0{,}175\,\frac{\lambda}{\rho^2}\,x^2}{0{,}35x + 1} . \qquad (14)$$

Si osservi che nei secondi membri delle (13) e (14) resta soltanto da fissare x, cioè, in fondo, r_2 essendo r_1 un dato, e si tenga presente che $E\varepsilon_{tim}$ cresce sempre al crescere di k_m, laddove il rapporto (14), di già positivo per un piccolo valore di x, cresce fino ad un massimo che d'ordinario non occorre raggiungere [8]. Si cerchi, per tentativi, un valore di k_m che, senza comportare una $E\varepsilon_{tim}$ più alta di quella che il materiale può sopportare, conferisca ad s_2/l_m un valore abbastanza alto (possibilmente maggiore di 1/3) affinchè si possa eseguire un raccordo efficace tra mozzo e corona senza invadere con esso, ed alterare, un tratto di profilo della ruota troppo esteso nel senso radiale. Si noti pertanto che se, per ottenere una $E\varepsilon_{tim}$ tollerabile dal materiale, si riducesse k_m sino a farlo troppo piccolo, si procurerebbero con ciò, all'insieme, delle proporzioni tali da rendere, tra l'altro, grossolanamente approssimato lo stesso valore della $E\varepsilon_{tim}$. [9]

Se s'incontrassero delle difficoltà a rintracciare un k_m soddisfacente tutti gli elencati requisiti, non resterebbe che a ritornare sul valore di σ_d assumendone, se possibile e con i mezzi indicati, uno più basso. Se ciò non fosse possibile, occorrerebbe abbandonare la categoria di ruote in esame e rivolgersi magari a quella delle ruote a profilo empirico seguendo uno dei tanti procedimenti noti, tutti però molto più laboriosi di questo che si va esponendo e fuori del nostro argomento.

Se, al contrario, un soddisfacente valore di k_m esiste, non solo le determinazioni della prima parte rimarranno convalidate, ma, detto q il valore che ne deriva al rapporto (14), si dedurranno ancora

$$r_2 = r_1\,k_m \quad ; \quad s_2 = s_3\,e^{\lambda(1 - r_2^2/r_3^2)} \quad ; \quad l_m = s_2/q \qquad (a;\,b;\,c)$$

e nulla più oltre mancherà per disegnare la ruota nel desiderato suo progetto preliminare. Sarà anche qui bene osservare che nelle determinazioni della seconda parte del procedimento, oramai esposto, risultano implicitamente rispettate le condizioni (7) ed (8), in esso non nominate.

Chiarimenti e dimostrazioni

[1] Essendo per definizione $\lambda = \ln(s_0 / s_3)$, la (1) si può scrivere

$$s = s_0 \, e^{-\lambda \frac{r^2}{r_3^2}} \qquad \text{(1 bis)}$$

da cui

$$\frac{1}{2} \frac{ds}{dr} = -\lambda \frac{rs}{r_3^2}$$

cioè: in punti superficiali di dischi diversi, ma a pari rapporti r/r_3 ed s/r_3, l'inclinazione del piano tangente su quello del moto è proporzionale a λ. Il valore λ si può quindi assumere, come di fatto si assume, a criterio per giudicare della rapidità con cui il disco varia di spessore al variare di r e per giudicare ancora se siano ammissibili le ipotesi semplificative adottate per rintracciare la (1). Così, quando λ eguaglia o supera 2,5, si ritiene che non si possa far più assegnamento pratico sulla presupposta uniformità delle tensioni interne. Di questo argomento si è interessato lo STODOLA (*Dampf- u. Gasturbinen*, Sechste Auflage, Springer, pagg. 317, 896 ÷ 8 e Z. d. V. d. I. 1907 pag. 1269) utilizzando anche alcune ricerche del CREE (*Proc. R. Soc. of London 1895* pag. 39 e *Quarterly Journal of Pure a. Applied Math.* 1895) e perciò si rimanda il lettore ai detti Autori.

Poichè, al contrario, del tutto nuova è l'espressione (10) di λ, ne diamo subito la semplicissima dimostrazione. Dalle (2) e (3) si ricava

$$E\,\varepsilon_{ti} = t_e \frac{2k^2}{k^2-1} - t_i \frac{0{,}7 + 1{,}3\,k^2}{k^2-1} + \left(0{,}825 + \frac{0{,}175}{k^2}\right)\mu u_e^2 \qquad \text{(14 bis)}$$

che, applicata alla corona e ricordando che è $u_{ec} = u_4 = \omega r_4$, $t_{ec} = t_0$ e per la (6) $t_{ic} = \sigma_d \, l_c / s_3'$, fornisce

$$E\,\varepsilon_{tic} = t_0 \frac{2k_c^2}{k_c^2-1} - \sigma_d \frac{0{,}7 + 1{,}3\,k_c^2}{k_c^2-1} \frac{s_3}{l_c} + \left(0{,}825 + \frac{0{,}175}{k_c^2}\right)\mu u_4^2 \qquad (15)$$

Uguagliando il secondo membro della (15) a quello della (5 bis) si ha una relazione da cui si ricava

$$\sigma_d = \frac{t_0 \frac{2k_c^2}{k_c^2 - 1} + \left(0{,}825 + \frac{0{,}175}{k_c^2}\right)\mu u_4^2}{0{,}7 + \frac{s_3}{l_c}\,\frac{0{,}7 + 1{,}3k_c^2}{k_c^2 - 1}} . \qquad (16)$$

Intanto dalla (1) si trae

$$\lambda = \ln \frac{s_0}{s_3} = \frac{\mu\omega^2 r_3^2}{2\sigma_d} = \frac{\mu u_4^2}{2k_c^2\sigma_d} . \qquad (17)$$

Sostituendo la (16) nell'ultimo membro della (17) si ottiene la (10).

[2] La valutazione di un conveniente s_3 in relazione agli sforzi occasionali accompagnanti la lavorazione ed il maneggio in genere della ruota, come pure una più obiettiva determinazione, in ubicazione e grandezza, della tensione di massimo valore assoluto in una corona che abbia l_c grande rispetto ad s_3, sono problemi molto ardui a trattarsi con rigore e che si risolvono praticamente mediante semplificazioni applicate con perizia e discernimento dal progettista. Tali problemi tuttavia, si presentano in qualsiasi categoria di ruote, per cui li riteniamo estranei alle finalità specifiche di queste pagine. A proposito di s_3 ricorderemo invece che, per altissime velocità periferiche, si cercò un tempo di indebolire deliberatamente l'attacco della corona al disco mediante due solchi simmetrici lungo i quali si sarebbe dovuto principalmente sviluppare un eventuale distacco della corona senza che la rottura invadesse il disco e magari lo stesso mozzo; ma le conseguenze dello sbilanciamento insorgente in una ruota veloce, per la perdita d'un pezzo di corona, sono esse stesse tanto gravi da privare di ogni attrattiva la cennata precauzione

[3] Che λ vari nello stesso senso di s_3 ed in senso contrario ad l_c è manifesto, dato che nessuna delle quantità che compaiono nel secondo membro della (10) è stata finora definita funzione di s_3 o di l_c. Che poi λ vari in senso contrario a k_c, dato che è sempre $k_c > 0$, lo si può vedere derivando la (10) rispetto a k_c^2: il numeratore di tal derivata risulta

$$L = 0{,}35 \frac{2t_0}{\mu u_4^2} - 1{,}35 \frac{2t_0}{\mu u_4^2}\,\frac{s_3}{l_c} - \frac{s_3}{l_c}$$

Se ora immaginiamo una massa distribuita con densità μ tra due superficie cilindriche di raggi $r_4 \pm z/2$ e per la larghezza l_c della corona, scegliendo z in modo che gli effetti d'inerzia della detta massa ideale sulla corona medesima equivalgano a quelli della palettatura, si avrà $t_0 = z\mu u_4^2/r_4$ che, sostituita nella precedente, fornisce

$$L = 0{,}7 \frac{z}{r_4} - 2{,}7 \frac{z}{r_4}\,\frac{s_3}{l_c} - \frac{s_3}{l_c}$$

Il vantaggio dell'eseguita sostituzione è la facilità con cui ci si rende conto che, di norma, risulta $z/r_4 < s_3/l_c$, onde $L < 0$ e quindi $d\lambda/d(k^2_c)$ e $d\lambda/d\,k_c$ entrambe negative.

[4] La (12), che si ricava immediatamente da una delle (17), ha una forma che lascerebbe sperare nella possibilità di ridurre σ_d accrescendo k_c. In tal caso, infatti, essendo già stato dimostrato che λ diminuisce al crescere di k_c, con l'incrementare k_c si otterrebbero due profitti: diminuire λ ed insieme diminuire σ_d. Per vedere che, di norma, ciò non è, in quanto al crescere di k_c il prodotto $k^2_c\lambda$ diminuisce e quindi cresce σ_d, basta dimostrare che è

$$\frac{d}{d\,k_c}\left(\frac{1}{k_c^2\lambda}\right) > 0$$

nell'intesa che λ sia funzione di k_c definita dalla (10).

Moltiplicando per k^2_c la (10), invertendo ed introducendo la sostituzione $k^2_c = 1 + y$, si ha un'espressione di $1/k^2_c\,\lambda$ in funzione della nuova variabile y, la cui derivata appunto rispetto ad y ha, evidentemente, lo stesso segno della derivata rispetto a k_c. Intanto, pel numeratore della derivata rispetto ad y, si trova

$$S = \left(-0{,}7\frac{z}{r_4} + 0{,}7\frac{z}{r_4}\frac{s_3}{l_c} + 0{,}7113\frac{s_3}{l_c} - 0{,}0613\right)y^2 +$$

$$+\left(0{,}7\frac{z}{r_4}\frac{s_3}{l_c} + 0{,}825\frac{s_3}{l_c} - 07\frac{z}{r_4}\right)y + 0{,}7\frac{z}{r_4}\frac{s_3}{l_c} + \frac{s_3}{l_c} - 0{,}7\frac{z}{r_4}.$$

Poichè è $y > 0$, per dimostrare che è $S > 0$, basterà dimostrare che tutti i suoi coefficienti sono positivi. Ora, perchè siano positivi gli ultimi due basta che sia $z/r_4 < s_3/l_c$; pel primo, invece, si potranno eseguire delle verifiche in casi concreti già abbastanza eccezionali, come ad esempio per $z/r_4 = 0{,}1$ ed $s_3/l_c = 0{,}2$; ovvero $z/r_4 = 0{,}2$ ed $s_3/l_c = 0{,}25$; ecc.

[5] Che sia $\sigma_{tim} > \sigma_d$ vien dimostrato nella nota [8].

[6] Dalla (1 bis) è facile dedurre

$$s_2 = s_3\,e^{\lambda\left(1 - \frac{r_2^2}{r_3}\right)}$$

la quale, se λ, r_2, r_3 non variano, è della forma $s_2 = As_3$ con A costante e maggiore di 1; onde, riferendoci ai valori assoluti, $\Delta s_2 > \Delta s_3$. Poichè, inoltre, sempre per λ, r_2, r_3 costanti, è $l_m = Bs_2$ con B costante e maggiore di 1, si ha in definitiva

$$\Delta l_m > \Delta s_2 > \Delta s_3.$$

[7] Infatti, nella (15), da cui si passa alla (16), è stata eliminata la t_{ic} mediante la (6); e la (16), da cui si passa alla (10), è ottenuta introducendo la (5 bis) equivalente alla (5). La (10) quindi contiene le (5) e (6).

[8] In questa nota chiariremo le (13) e (14), ma prima dimostreremo che, in tutta la ruota, la tensione ideale di massimo valore assoluto è la $E\varepsilon_{tim}$; salvo, beninteso, ciò che possa accadere nella corona per un ancoraggio spinto o un montaggio difettoso della palettatura.

Nelle applicazioni si può ripetutamente constatare che la σ_{tim} e la $E\varepsilon_{tim}$ sono le tensioni reale ed ideale di mass. v. a.; ma una constatazione di questo genere non è una giustificazione soddisfacente e perciò sembra molto utile ricercarne una che faccia appello nel modo più ristretto possibile ai valori numerici, onde possano apparire chiari i limiti della responsabilità di questi ultimi. Cominciando dalla corona, faremo vedere che in essa, fra tutte le σ_{tc} e le σ_{rc}, la tensione di mass. v. a. è la σ_{tic}; per cui, fra le tensioni ideali della corona, quella di mass. v. a. è la $E\varepsilon_{tic}$. Ma questa, per l'ipotesi (5), è eguale alla $E\varepsilon_d$ del disco; onde, provato che la $E\varepsilon_{tim}$ è nel mozzo la tensione ideale di mass. v. a., basterà mostrare, per concludere, che è $E\varepsilon_{tim} > E\varepsilon_d$.

Per provare che la σ_{tic} è la tensione di mass. v. a. nella corona, faremo vedere anzitutto ch'essa è la più grande fra tutte le σ_{tc}, essendo positiva in tutto l'intervallo (r_{ic}, r_{ec}) con $d\sigma_{tc}/dr < 0$.

Infatti, che nell'estremo inferiore sia $\sigma_{tc} > 0$, cioè $\sigma_{tic} > 0$, si vede immediatamente, essendo per ipotesi

$$0 < \frac{s_3}{l_c} < 1 \quad ; \quad t_{ic} = \frac{s_3}{l_c}\,\sigma_d \quad ; \quad \sigma_{tic} - 0{,}3\,t_{ic} = 0{,}7\,\sigma_d \qquad (18)$$

onde

$$\sigma_{tic} = \left(0{,}7 + 0{,}3\,\frac{s_3}{l_c}\right)\sigma_d \qquad (19)$$

per cui

$$\sigma_d > \sigma_{tic} > 0. \qquad (20)$$

Che σ_{tc} sia positiva nell'estremo superiore dell'intervallo, cioè $\sigma_{tec} > 0$, si vede anche agevolmente. Infatti, dalle (2) e (3), per $r = r_{ec}$, ricordando pure le due ultime delle (18), nonchè $t_{ec} = t_0 > 0$, si ha rispettivamente

$$\sigma_{tec} = t_0\,\frac{k_c^2 + 1}{k_c^2 - 1} - \frac{s_3}{l_c}\,\frac{2}{k_c^2 - 1}\,\sigma_d + \mu u_{ec}^2\left(0{,}175 + \frac{0{,}825}{k_c^2}\right)$$

$$\left(0{,}7 + 0{,}3\,\frac{s_3}{l_c}\right)\sigma_d - t_0\,\frac{2k_c^2}{k_c^2 - 1} - \frac{s_3}{l_c}\,\frac{k_c^2 + 1}{k_c^2 - 1}\,\sigma_d + \mu u_{ec}^2\left(0{,}825 + \frac{0{,}175}{k_c^2}\right)$$

Ricavando σ_d da quest' ultima e sostituendo nella precedente

$$\sigma_{tec}\left[0{,}7+\frac{s_3}{l_c}\left(0{,}3+\frac{k_c^2+1}{k_c^2-1}\right)\right]=t_0\left[\frac{k_c^2+1}{k_c^2-1}\left(0{,}7+0{,}3\frac{s_3}{l_c}\right)+\frac{s_3}{l_c}\right]+$$
$$+\mu u_{ec}^2\left\{0{,}7\left(0{,}175+\frac{0.825}{k_c^2}\right)+\frac{1}{k_c^2}\frac{s_3}{l_c}\left[(1{,}3k_c^2+0{,}7)\,0{,}175-0{,}35\right]\right\}$$

da cui, tenendo presente che è $k_c > 1$, si deduce $\sigma_{tec} > 0$.

Per vedere ora che è $d\sigma_{tc}/dr < 0$ in tutto l'intervallo che interessa, ricaveremo, derivando la (2) applicata alla corona:

$$\frac{1}{2}\frac{r^3}{r_e^2}\frac{d\sigma_{tc}}{dr}=-\frac{t_0-t_{ic}}{k_c^2-1}-\mu u_{ec}^2\left(0{,}4125\frac{1}{k_c^2}+0{,}2375\frac{r^4}{r_{ec}^4}\right) \qquad (21)$$

e mostreremo che anche il massimo valore algebrico assunto dal 2° membro cioè quello per $r=r_{ic}$:

$$-\frac{t_0-t_{ic}}{k_c^2-1}-\mu u_{ec}^2\left(0{,}4125\frac{1}{k_c^2}+0{,}2375\frac{1}{k_c^4}\right) \qquad (22)$$

è negativo. A tale scopo, dalla (2), per $r=r_{ic}$ ricaviamo

$$\sigma_{tic}=t_0\frac{2k_c^2}{k_c^2-1}-t_{ic}\frac{k_c^2+1}{k_c^2-1}+\mu u_{ec}^2\left(0{,}825+0{,}175\frac{1}{k_c^2}\right) \qquad (23)$$

Eliminando, intanto, σ_d tra la (18) e la (19), si ha

$$\sigma_{tic}=\left(0{,}7\frac{l_c}{s_3}+0{,}3\right)t_{ic} \qquad (23\ \text{bis})$$

da cui si vede che è $\sigma_{tic} > t_{ic}$: ponendo quindi t_{ic} al posto di σ_{tic} in (23) si ha

$$-\frac{t_0-t_{ic}}{k_c^2-1}-\mu u_{ec}^2\left(0{,}4125\frac{1}{k_c^2}+0{,}0875\frac{1}{k_c^4}\right)<0$$

l cui primo membro ha valore algebrico maggiore della quantità (22) e perciò quest'ultima, a più forte ragione, sarà negativa, vale a dire sarà negativa la $d\sigma_{tc}/dr$. Resta così dimostrato che la σ_{tic} è la σ_{tc} di mass. v. a.

Dimostreremo adesso che, in valore assoluto, σ_{tic} è maggiore di tutte le σ_{rc}. Dalla (3), applicata alla corona, si deduce intanto che σ_{rc} è sempre positiva (perchè ciascuno dei tre termini a 2° membro non è mai negativo nell'intervallo) e quindi, al nostro scopo, possiamo indagare se è $\sigma_{tic} > \sigma_{rc}$ qualuque sia r.

Esprimendo la σ_{rc} in base alla (3) e sottraendo della (23), si ha

$$\sigma_{tic} - \sigma_{rc} = \frac{k_c^2 + \frac{r_{ec}^2}{r^2}}{k_c^2 - 1}\left(t_0 - t_{ic}\right) + \mu u_{ec}^2 \left[0{,}4125\left(1 + \frac{r_{ic}^2}{r^2} + \frac{r^2}{r_{ec}^2}\right) - 0{,}2375 \frac{1}{k_c^2}\right] \quad (24)$$

e sostituendo la (23 bis) nella (23),

$$t_{ic} = \frac{t_0}{H} \frac{2k_c^2}{k_c^2 - 1} + \frac{\mu u_{ec}^2}{H}\left(0{,}825 + 0{,}175 \frac{1}{k_c^2}\right) \quad (25)$$

in cui è

$$H = 0{,}7 \frac{l_c}{s_3} + 0{,}3 + \frac{k_c^2 + 1}{k_c^2 - 1} \quad (26)$$

Sostituendo l'espressione (25) di t_{ic} nella (24), si ottiene

$$\sigma_{tic} - \sigma_{rc} = t_0 \frac{k_c^2 + r_{ec}^2/r^2}{k_c^2 - 1}\left(1 - \frac{2k_c^2}{H(k_c^2 - 1)}\right) + \mu u_{ec}^2 \left[0{,}4125 - \frac{k_c^2 + r_{ec}^2/r^2}{H(k_c^2 - 1)} 0{,}825\right.$$

$$\left. - \left(0{,}2375 + \frac{k_c^2 + r_{ec}^2/r^2}{H(k_c^2 - 1)} 0{,}175\right) \frac{1}{k_c^2} + \left(\frac{r_{ic}^2}{r^2} + \frac{r^2}{r_{ec}^2}\right) 0{,}4125\right] \quad (27)$$

Il valore algebrico del 2° membro della (27) diventerà più piccolo se, al posto di H, porremo un H_0 minore di H; perchè, in essa, la H compare sempre a denominatore di quantità precedute dal segno meno: otteremo H_0 ponendo 1 al posto di l_c / s_3 nella (26). Con la detta sostituzione, la (27) diventa, dopo qualche passaggio semplificativo

$$\sigma_{tic} - \sigma_{rc} > \mu u_{ec}^2 \left[-0{,}325 \frac{1}{k_c^2} - \frac{r_{ic}^2}{r^2} \frac{1}{k_c^2} 0{,}0875 + \frac{r^2}{r_{ec}^2} 0{,}4125\right]$$

La somma nell'ultima parentesi quadra è nulla per $r = r_{ic}$, mentre la sua derivata rispetto ad r è essenzialmente positiva: si conclude dunque che, in tutto l'intervallo (r_{ic}, r_{ec}) si ha $\sigma_{tic} > \sigma_{rc}$ e possiamo quindi affermare che la $E\varepsilon_{tic}$, data dalla (14 bis) o dalla (15), nonchè equivalente a $0{,}7\,\sigma_d$, è la tensione ideale di mass. v. a. nell'insieme corona-disco.

Passando a quel che riguarda il mozzo, si hanno le condizioni (8) e (7 bis) che si possono scrivere rispettivamente

$$t_{em} = \frac{s_2}{l_m} \sigma_d \quad (28)$$

$$E\varepsilon_{tem} = 0{,}7\,\sigma_d \quad (29)$$

a cui va aggiunta la

$$t_{em} = -p_0 \tag{30}$$

Per la (30), dalla (2) applicata al mozzo si trae

$$\sigma_{tm} > 0 \quad ; \quad \frac{d\sigma_{tm}}{dr} < 0$$

onde la σ_{tm} di mass. v. a. appare subito essere la σ_{tim} che si scrive

$$\sigma_{tim} = \frac{2k_m^2}{k_m^2 - 1} \frac{s_2}{l_m} \sigma_d + p_0 \frac{k_m^2 + 1}{k_m^2 - 1} + \mu u_{em}^2 \left(0{,}825 + \frac{0{,}175}{k_m^2}\right) \tag{31}$$

Ma, come ci accingiamo a mostrare, la σ_{tim} è anche maggiore di tutte le σ_{rm}. Per le (3), (28) e (30) si ha intanto

$$\sigma_{rm} = \frac{k_m^2 - r_{em}^2/r^2}{k_m^2 - 1} \frac{s_2}{l_m} \sigma_d - p_0 \frac{r_{em}^2/r^2 - 1}{k_m^2 - 1} + \mu u_{em}^2\, 0{,}4125 \left(1 + \frac{1}{k_m^2} - \frac{r_{im}^2}{r^2} - \frac{r^2}{r_{em}^2}\right) \tag{32}$$

da cui, derivando,

$$\frac{d\sigma_{rm}}{dr} = 2\frac{r_{em}^2}{r^3}\left[\frac{\sigma_d s_2/l_m + p_0}{k_m^2 - 1} + \mu u_{em}^2 0{,}4125\left(\frac{1}{k_m^2} - \frac{r^4}{r_{em}^4}\right)\right] \tag{33}$$

Negli estremi inferiore e superiore dell'intervallo (r_{im}, r_{em}), la σ_{rm} risulta rispettivamente negativa e positiva (infatti, dal già detto, si ha $\sigma_{rim} = t_{im} = -p_0 < 0$ e $\sigma_{rem} = t_{em} = \frac{s_2}{l_m} \sigma_d > 0$) di più, la (33) mostra che nell'estremo inferiore è $d\sigma_{rm} / dr > 0$; quindi, se questa derivata non si annulla nell'intervallo, o tutt' al più nell' estremo superiore, basterà paragonare la σ_{tim} con $| \sigma_{rim} |$ e con σ_{rem}, paragone che, per la (31), termina con le conclusioni

$$\sigma_{tim} > | \sigma_{rim} | \quad ; \quad \sigma_{tim} > \sigma_{rem}$$

Se poi il 2.° membro della (33) avesse ad annullarsi per un r_x interno all'intervallo, ciò significherebbe l'esistenza di un $(\sigma_{rm})_{max}$ maggiore di σ_{rem}, con cui allora sarebbe da paragonarsi σ_{tim}.

Ammessa l'esistenza d'un tal r_x, introducendolo nella (32) si avrà

$$(\sigma_{rm})_{max} = \frac{k_m^2 \sigma_d s_2/l_m + p_0}{k_m^2 - 1} - \frac{\sigma_d s_2/l_m + p_0}{k_m^2 - 1} + \mu u_{em}^2 0{,}4125 \left(1 + \frac{1}{k_m^2} - \frac{r_{im}^2}{r_x^2} - \frac{r_x^2}{r_{em}^2}\right) \tag{34}$$

che, essendo in virtù della (33) per $d\sigma_{rm} / dr = 0$:

$$\frac{\sigma_d s_2 / l_m + p_0}{k_m^2 - 1} = - \mu u_{em}^2 0{,}4125 \left(\frac{1}{k_m^2} - \frac{r_x^4}{r_{em}^4} \right)$$

diventa

$$(\sigma_{rm})_{max} = \frac{k_m^2 \sigma_d s_2 / l_m + p_0}{k_m^2 - 1} + \mu u_{em}^2 0.4125 \left(1 + \frac{1}{k_m^2} - 2 \frac{r_x^2}{r_{em}^2} \right)$$

Se ora in quest' ultima, poniamo r_i al posto di r_x, essendo $r_x > r_i$, avremo

$$(\sigma_{rm})_{max} < \frac{k_m^2}{k_m^2 - 1} \frac{s_2}{l_m} \sigma_d + p_0 \frac{1}{k_m^2 - 1} + \mu u_{em}^2 0{,}4125 \left(1 - \frac{1}{k_m^2} \right)$$

che, sottratta membro a membro dalla (31), fornisce una differenza positiva, onde $\sigma_{tim} > (\sigma_{rm})_{max}$, Resta dunque dimostrato che σ_{tim} è la tensione reale di mass. v. a. in tutto il mozzo.

Da quanto precede risulta che, per $r = r_x$, σ_{rm} e σ_{tm} sono entrambe positive ed inferiori a σ_{tim}; mentre σ_{rim}, per la (30), è negativa.

È quindi chiarissimo che, nel mozzo, la tensione ideale di mass. v. a. è la $E \varepsilon_{tim}$ e poiché, come abbiamo detto chiudendo la discussione riguardante l' insieme corona-disco, quivi la tensione di mass. v. a. si può esprimere con $0{,}7 \sigma_d$, ci resta da dimostrare che è $E \varepsilon_{tim} > 0{,}7 \sigma_d$. Ciò si deduce immediatamente dalla (13), giacchè questa lascia scorgere che la $E \varepsilon_{tim}$ cresce con x ed assume, per $x = 0$, il valore $0{,}7 \sigma_d$ il quale perciò risulta più piccolo di qualsiasi valore assunto per x positivo.

Alla (13), intanto, si perviene come segue. Dalle (2) e (3), applicate al mozzo, ed introducendo la (30), si ha

$$E \varepsilon_{tem} = \frac{0{,}7 k_m^2 + 1{,}3}{k_m^2 - 1} t_{em} + \frac{2}{k_m^2 - 1} p_0 + \mu u_{em}^2 \left(0{,}175 + \frac{0{,}825}{k_m^2} \right) \tag{35}$$

dalla quale, per la (7 bis), si ricava

$$t_{em} = \frac{k_m^2 - 1}{0{,}7 k_m^2 + 1{,}3} \left[0{,}7 \sigma_d - \frac{2}{k_m^2 - 1} p_0 - \mu u_{em}^2 \left(0{,}175 + \frac{0{,}825}{k_m^2} \right) \right] \tag{36}$$

Applicando al mozzo la (14 bis) ed introducendovi le (30) e (36), si ha

$$E \varepsilon_{tim} = \frac{2 k_m^2}{0{,}7 k_m^2 + 1{,}3} \left[0{,}7 \sigma_d - \frac{2}{k_m^2 - 1} p_0 - \mu u_{em}^2 \left(0{,}175 + \frac{0{,}825}{k_m^2} \right) \right]$$

$$+ p_0 \frac{0{,}7 + 1{,}3 k_m^2}{k_m^2 - 1} + \mu u_{em}^2 \left(0{,}825 + \frac{0{,}175}{k_m^2} \right)$$

Quest'espressione, osservando che è $u_{em} = u_1 k_m$, si può mettere sotto la forma

$$E \varepsilon_{tim} = \frac{1,4 \sigma_d + (1,4 \sigma_d + 0,91 p_0)(k_m^2 - 1) + 0,2275 \mu u_1^2 (k_m^2 - 1)^2}{0,7 (k_m^2 - 1) + 2} \qquad (37)$$

D'altra parte, una delle (17), ponendo $\rho = r_2 / r_1$, si può scrivere

$$\frac{\mu u_1^2}{2\sigma_d} = \frac{\lambda}{\rho^2} \qquad (38)$$

nel cui secondo membro compaiono esclusivamente numeri puri, funzioni di elementi geometrici della ruota. Ponendo

$$x = k_m^2 - 1 \qquad (39)$$

e mediante la (38), dalla (37) si passa subito alla (13).

Per esaminare ora il comportamento della $E \varepsilon_{tim}$ al variare di k_m basta evidentemente derivare rispetto ad x: il numeratore dell'espressione che in tal modo si ottiene dalla (13) è

$$0,159 \frac{\lambda}{\rho^2} x^2 + 0,91 \frac{\lambda}{\rho^2} x + 0,91 \left(1 + \frac{p_0}{\sigma_d}\right)$$

certamente positivo per $x > 0$, cioè per $k_m^2 > 1$. Dunque $E \varepsilon_{tim}$ cresce con $k_m > 1$.

Quanto alla (14), essa si ricava eliminando la t_{em} dalla (36) mediante la (8) e poi introducendo le (38) e (39).

Si noti, a questo punto, che, dovendo essere $s_2 / t_m > 0$, il coefficiente di x nel numeratore al 2° membro della (14) deve necessariamente essere positivo e quindi è necessario che sia

$$\lambda < 0,35 \rho^2 \qquad (40)$$

Per lo stesso motivo, la (40) non solo deve essere soddisfatta, ma tanto più largamente soddisfatta quanto maggiore è il valore assoluto della somma degli altri due termini contenuti nel menzionato numeratore. Accade quindi che, per piccoli valori di ρ, la ruota non potrebbe essere realizzata per tutti i λ consentiti dalla (11), sì bene soltanto per i più piccoli e ciò indipendentemente sia dalla velocità, sia dalla resistenza del materiale impiegato. Ma un piccolo valore di λ comporta una forma del disco che poco si discosta da quella di spessore uniforme e questo fatto, nella specie, è anche più sentito per la contemporanea piccolezza di ρ da

cui consegue, in definitiva, un grosso mozzo ed una modesta corona, vale a dire un profilo di ruota molto tozzo nel quale la parte corrispondente al disco è assai ridotta. Appare quindi chiaro che il campo per la proficua applicazione della ruota a disco di uniforme resistenza non è certo quello del cennato tozzo profilo, facilmente distinguibile a prima vista dai valori dei dati stessi del problema, ed è perciò giusto ritenere normale il caso in cui la (40) riesce meno restrittiva della (11), oltre che largamente soddisfatta.

Se ora supponiamo per un momento $p_0 = 0$, la (14) mostra che s_2 / l_m si annullerebbe per $x = 0$ e per il valore positivo $x = 2\rho^2 / \lambda - 5{,}714$; cioè per i due valori reali

$$k_m = 1 \qquad \text{e} \qquad k_m = \sqrt{2\rho^2/\lambda - 4{,}714} > 1$$

Questi due valori individuano un intervallo in cui s_2 / l_m resta positivo: quando, invece, p_0 / σ_d è diverso da zero pur restando entro i limiti delle applicazioni (lo STOTOLA, lo ZIETEMANN e altri autori esemplificano $p_0 = 50$ kg / cm²), gli estremi del detto intervallo non fanno che avvicinarsi alquanto tra loro ed i valori di k_m, di pratico interesse, capitano d'ordinario nel campo dello s_2/l_m crescente.

[9] Della distribuzione della tensione nella superficie interna del mozzo, quando k_m è piccolo, si è occupato lo STODOLA (l. c. pag: 324 e 950-2).

Intanto un'ultima osservazione riguardante la seconda parte del procedimento si può fare circa la scelta della (9) per condizione di resistenza della ruota. Si può infatti osservare che la (9) limita, in sostanza, la deformazione unitaria, mentre il profilo del disco fu desunto dall'ipotesi che la rottura sia provocata dal superamento di un certo limite da parte della tensione normale.

Notiamo subito che dalla espressione (13) della tensione ideale di mass. v. a. si può passare molto facilmente a quella $\sigma_{tim} = E\,\varepsilon_{tim} - p_0 / m$ della corrispondente tensione reale. Ma con questo non vogliamo perdere l'occasione di chiarire che l'incoerenza innanzi rilevata è puramente formale, in quanto l'ipotesi conducente al profilo adottato pel disco si deve oggi ritenere in ciò preferita soltanto in omaggio alla sua maggiore comodità e non perchè più attendibile di ogni altra concernente il pericolo della rottura. Tale ipotesi lascerà quindi discutibile, come già cennato, l'opportunità della conseguita distribuzione del materiale nel disco, ma non costituirà obbligo alcuno circa il criterio da seguire per rintracciare la regione più pericolosa in tutta la ruota e per stabilirne la condizione di resistenza: compiti questi nei quali la tecnica resta dunque libera di trarsi d'impaccio in uno qualunque dei soliti modi che trovano per ora buona giu-

stificazione nella semplicità, e sufficiente sicurezza in frequenti confronti con l' esperienza.

Esempio

Preleveremo i dati per un esempio dal caso che il Baer (*Forschung*, 1936; pagg. 187-90) utilizza appunto nell'applicazione d'un suo metodo di calcolo, certo tra i meno complicati, istituito per determinare le tensioni interne di una ruota a profilo qualsiasi, già assegnato.

I procedimenti del genere di quello testè incidentalmente cennato (i quali sovente vengono chiamati metodi di calcolo della ruota, tacendo per brevità che si tratta di metodi indiretti, perchè fondati in vero su laboriose verifiche di organi già completamente, se pur provvissoriamente, definiti) hanno il pregio di permettere l'esecuzione di ottimi progetti; ma, raggiungendo lo scopo soltanto attraverso successive, delicate modifiche del profilo, si appalesano sempre di una gravosità considerevole.

Ora, la preannunziata scelta dei nostri dati non mira punto a stabilire un paragone tra i risultati dei due procedimenti (anche perchè il citato Autore non presenta mica la sua ruota come una realizzazione modello), ma si propone di offrire, insieme con un esempio d'applicazione del procedimento esposto, anche l'occasione d'un eventuale confronto che si presti a mettere in piena luce i notevolissimi ed in tal modo accresciuti vantaggi di rapidità e comodità di calcolo derivanti dall'adozione del profilo a disco di uniforme resistenza.

Preleviamo dunque come dati principali:

$$n = 6000 \text{ giri} / \text{m}' \qquad r_4 = 41{,}4 \text{ cm} \qquad r_1 = 8{,}0 \text{ cm}$$

$$t_0 = 220 \text{ kg} / \text{cm}^2 \qquad \mu = 8 \times 10^{-6} \text{ kg sec}^2 / \text{cm}^4$$

e, come dati di massima che del resto non ci capiterà di dover modificare:

$$r_3 = 38{,}4 \text{ cm} \qquad l_c = 2{,}6 \text{ cm}$$

Preciseremo, inoltre, che sia $p_0 = 50$ kg / cm².

Con questi valori, la (10) e la (12) diventano rispettivamente

$$\lambda = 0{,}1933 + 1{,}446\, s_3$$

$$\sigma_d = \frac{2328}{\lambda} \text{ kg} / \text{cm}^2.$$

Assumendo $s_3 = 1$ cm che soddisfa le condizioni a suo luogo esposte, si

ha quindi

$$\lambda = 1{,}639 \qquad \sigma_d = 1420 \ \mathrm{kg/cm^2}$$

valori che, rispettando anch' essi soddisfacentemente le condizioni prescritte, consentono di passare alla seconda parte della ricerca.

Le (13) e (14) forniscono allora rispettivamente

$$E\,\varepsilon_{tim} = \frac{2 + 2{,}046x + 0{,}04624x^2}{2{,}857 + x}\,\sigma_d$$

$$\frac{s_2}{l_m} = \frac{-\,0{,}03521 + 0{,}2789x - 0{,}01245x^2}{1 + 0{,}35x}$$

Con l'aiuto di queste relazioni e delle (a; b; c) si può compilare, se si vuole, il seguente specchietto, in cui soltanto i dati principali non compaiono perchè invariabili,

$s_3 = 1$ cm.

$r_3 = 38{,}4$ cm; $l_c = 2{,}6$ cm; $\lambda = 1{,}369$; $\sigma_d = 1420$ kg / cm²

x	s_2 / l_m	$E\,\varepsilon_{tim}$ (kg / cm²)	k_m	r_2 (cm)	s_2 (cm)	l_m (cm)
1	0,171	$1{,}061\,\sigma_d = 1507$	1,41	11,31	4,47	26,1
2	0,278	$1{,}292\,\sigma_d = 1835$	1,73	13,86	4,16	15,0
3	0,336	$1{,}461\,\sigma_d = 2075$	2,00	16,00	3,87	11,5
4	0,367	$1{,}593\,\sigma_d = 2262$	2,24	17,89	3,61	9,8
5	0,381	$1{,}704\,\sigma_d = 2420$	2,45	19,60	3,36	8,8

Un rapido esame mostra che, i due k_m più bassi (1,41 e 1,73) dànno rapporti s_2/l_m troppo piccoli e mozzi eccessivamente lunghi; laddove i due k_m più alti (2,24 e 2,45) dànno bensì mozzi di lunghezza ammissibile, ma troppo spessi e pesanti: una soluzione accettabile è invece data da $k_m = 2$ a cui corrispondono $s_2/l_m = 0{,}336$ ed $E\varepsilon_{tim} = 2075$ kg/cm².

Tuttavia, la comparsa quasi spontanea d'una soluzione accettabile non

deve far ritenere superfluo il ripetere la ricerca per qualche altro valore di s_3, dato che, come fu detto e poi chiarito nella nota [6], a piccoli ritocchi di tale spessore corrispondono variazioni spesso profittevoli delle altre grandezze. Diminuendo infatti del 10 % il valore della menzionata variabile, cioè assumendo $s_3 = 0,9$ cm per cui la ruota certamente conserva ancora sufficiente resistenza nei riguardi delle operazioni di lavorazione e di trasporto, si trova che, per lo stesse $k_m = 2$, il rapporto s_3 / l_m diventa 0,352 col pregio d'un piccolo incremento, ma si trova ancora che la lunghezza del mozzo discende a soli 8,8 cm con una contrazione di ben oltre il 24 %, fatto che costituisce un sensibile vantaggio perchè all'alleggerimento della ruota consente di aggiungere, se altro non vi si oppone, una riduzione della lunghezza e del peso sia dell'albero, sia dell'intera turbina. Che, pel nuovo valore di s_3, la tensione ideale massima salga a 2260 kg / cm² non ha alcuna importanza, dato che i materiali usati in questo genere di costruzioni permettono di tollerarvi, come è noto, tensioni anche notevolmente superiori.

L'eruzione del Vesuvio del 79 d. C.

Memoria del dott. **Giuseppe Mirigliano**

(presentata dal socio G. De Lorenzo nell'adunanza del dì 11 giugno 1938 - XVI per l'inserzione nel vol. I, serie 3ª, degli Atti)

Sunto. — Il lavoro prende in esame l'eruzione del Vesuvio del 79 d. C. Dopo una rassegna critica delle ricerche compiute dagli studiosi precedenti, l'A. intraprende lo studio petrografico dei materiali della eruzione, servendosi di un largo corredo di preparati microscopici. Dai dati forniti da questo studio e dalle indagini geologiche condotte, tanto nel territorio di Ercolano e di Pompei, quanto sul complesso vulcanico del Somma-Vesuvio, l'A. desume le modalità dell'eruzione pliniana, e porta nuovi contributi in appoggio all'ipotesi del seppellimento *per via subaerea* di Ercolano e di Pompei. A sostegno di tale ipotesi vengono anche le indagini sui relitti del dinamismo dell'ernzione stessa, dall'A. compiute nel territorio di Ercolano e di Pompei. Completa l'illustrazione del lavoro un cospicuo numero di sezioni geologiche e di fotografie originali.

Ricerche geofisiche alle grotte di Pertosa

Nota del Prof. **Giuseppe Imbò**, *presentata dal socio* **A. Carrelli**

(Adunanza del dì 11 novembre 1939 - XVIII)

Sunto. Si dà una relazione delle osservazioni sul numero dei piccoli ioni e sulle radiazioni penetranti eseguite alle grotte di Pertosa in due stazioni rispettivamente situate all'esterno e nell'interno delle grotte, là dove lo spessore di roccia soprastante era di m. 47. I valori ottenuti mostrano che mentre per la stazione esterna il numero dei piccoli ioni è pienamente giustificato in base alla ottenuta intensità delle radiazioni penetranti ; per la stazione interna l'alto tenore ionico è attribuibile in massima parte all'effetto Lenard per soluzioni saline. Un raffronto poi tra gli ottenuti valori dei coefficienti di assorbimento nella roccia per le ultraradiazioni e quelli deducibili in base alle ammesse curve di assorbimento delle ultraradiazioni nell'acqua, lascia dedurre l'esistenza, d'altronde intuibile, di altre gallerie soprastanti quella esplorata.

Già qualche anno fa i direttori degli Istituti di Fisica sperimentale e di Fisica terrestre della R. Università di Napoli fissarono le linee generali per l'espletamento di un vasto piano di ricerche geofisiche da eseguirsi in collaborazione alle Grotte di Pertosa.

Per svariate difficoltà sorte nell'attuazione del programma, non esclusa la distanza, non è stata possibile compiervi alcuna ricerca fino al presente. D'altro canto per evitare ancora ulteriori rinvii è stato necessario modificare il programma originale, nel senso di escludere da esso, almeno per il momento, le ricerche per le quali sarebbero occorsi appositi impianti, nonchè quelle di lunga durata ; e di limitare le osservazioni a quelle sole eseguibili in brevi intervalli di tempo od a varie riprese anche notevolmente distanziate.

In questa nota dò un resoconto delle prime osservazioni compiute nell'intervallo 8-11 giugno 1939 e consistite in misure di radiazioni penetranti con l'apparecchio del Kolhörster, del numero di piccoli ioni con il contaioni Ebert, della radioattività delle acque con un apparecchio Schmidt da viaggio. Non dò la descrizione degli strumenti adoperati, in quanto essi sono stati già descritti in precedenti pubblicazioni [1]).

---

[1]) Rizzo G. B. *Misura delle radiazioni penetranti sul Monte Rocciamelone.* Atti R. Acc. delle Scienze Fis. e Mat. di Napoli, vol. XX, Serie 2ª N. 4 (1933).

Signore F. *Le radiazioni penetranti ed il coefficiente di ricombinazione dei piccoli*

Le misure [2]) di radiazioni penetranti con l'apparecchio libero oppure racchiuso in uno schermo di ferro di cm. 5 di spessore furono eseguite all'esterno (stazione A) e nell'interno delle Grotte (Stazione B) [3]). Come stazione esterna venne scelto uno spiazzo a poca distanza dall'ingresso e ad

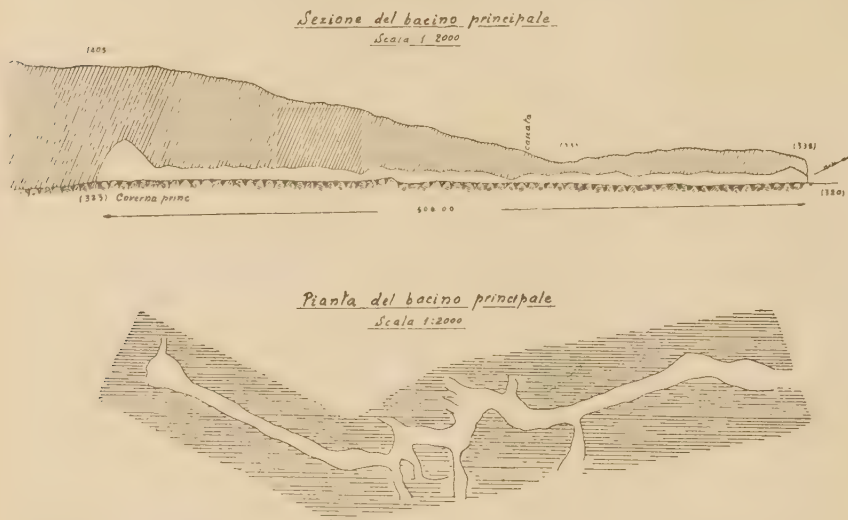



Fig. 1.

una quota di 315 m. sul livello del mare. Le osservazioni nell'interno sono state eseguite in una spaziosa caverna alta circa metri 35, situata ad una distanza lineare dall'ingresso di m. 505 e presso a poco al medesimo li-

---

corpuscoli elettrizzati al Vesuvio. Annali del R. Osservatorio Vesuviano, Serie 4ª, vol. III, 1931-1932.

Imbò G. *Densità ioniche all' Osservatorio e nel fondo del cratere vesuviano*, Bulletin Volcanologique, N.os 27 à 30, 1931.

Imbò G. *Misura della radioattività di alcune acque di Ischia.* La Ricerca Scientifica, Anno X, N. 6, Roma, 1939.

[2]) Per l' esecuzione delle osservazioni sono stato validamente coadiuvato, oltre che dal Prof. Carrelli, anche dai Dott. Cennamo, Cena, Altieri, che sentitamente ringrazio.

[3]) Le Grotte di Pertosa appartengono alla categoria delle grotte carsiche; sono quindi dovute prevalentemente all'azione solvente ed erosiva delle acque sulle rocce calcaree dell'Alburno. Nella figura viene data la sezione e la pianta delle principali grotte finora esplorate.

Esse furono rilevate cortesamente dall' ing. Guariglia, Vice Preside della Provincia di Salerno, al quale è dovuto lo schizzo riprodotto e che vivamente

vello (m. 323). Le serie di osservazioni sono consistite nelle misure di potenziali V, compresi tra 280 e 180 volts, ad intervalli non costanti di tempo. Operando in regime di saturazione, i valori osservati di V risultano dati dall'espressione:

$$V = V_0 - b_* t,$$

dove t è il tempo contato dall'istante in cui si è osservato il particolare valore V_0. Qualora si scelga come unità di tempo il minuto, la caduta oraria di potenziale è data da:

$$\left(\frac{\Delta V}{\Delta t}\right)_{t=1^h} = -60\, b_* .$$

Il valore di b_* è determinato col metodo dei minimi quadrati, applicato complessivamente alle varie serie di osservazioni eseguite nelle medesime condizioni in ciascuna stazione.

Di conseguenza, tenendo conto delle costanti strumentali, l'intensità delle radiazioni, ossia il numero (J) delle coppie di ioni prodotti nell'interno della camera di ionizzazione per azione delle radiazioni, in un cmc. d'aria nelle condizioni normali ed in 1^s, è dato da

$$q = 0{,}163\, b_* (J) - q_r ,$$

avendo indicato con q_r l'attività residua delle pareti, il cui valore, comunicato dalla casa costruttrice Günther et Tegetmeyer è di 0,80 (J).

Le misure col contaioni Ebert sono state eseguite nelle stesse due anzidette stazioni. Il valore del numero dei piccoli ioni per cmc. è stato ottenuto con l'applicazione della formula:

$$n = 1606{,}4\, \frac{\Delta V}{u} ,$$

dove ΔV indica la caduta di potenziale in volt (s'intende depurata dalla caduta spontanea osservata all'inizio ed alla fine di ciascuna osservazione) durante il passaggio attraverso il condensatore di u ettometri di aria, il cui valore è dedotto dall'apposito contatore annesso allo strumento.

Le acque per la misura della radioattività vennero prelevate con la indispensabile accuratezza a monte di una cascata alimentante il corso d'acqua scorrente lungo il primo tratto delle grotte, di circa 160 metri di lunghezza.

---

ringrazio unitamente all'amico Carrelli, anche per le notevoli cortesie prodigateci durante la nostra permanenza alle Grotte.

I risultati ottenuti sono riassunti nel seguente specchio.

Intensità delle radiazioni penetranti

	Con lo strumento libero	Con lo strumento schermato
Stazione *A*	5,94 ± 0,001	3,64 ± 0,001
Stazione *B*	9,99 ± 0,002	2,91 ± 0,001

Numero di piccoli ioni

	n_+	n_-
Stazione *A*	1230 ± 160	1460 ± 290
Stazione *B*	37550 ± 1400	34400 ± 1370

Misure di radioattività delle acque

Data	Temp.	Volume prelevato di acqua	Contenuto di radon per litro in U. M.
10 giugno	13°,2	622 cmc.	0,4

Uno sguardo anche superficiale delle ottenute intensità delle radiazioni penetranti è sufficiente a mostrare, come d'altronde era prevedibile, un diverso comportamento nelle due stazioni, e cioè mentre nella grotta notasi un prevalenza di radiazioni tenere, corrispondenti ai raggi gamma delle sostanze radioattive distribuite nel suolo e nell' aria; dalle osservazioni eseguite fuori la grotta rilevasi invece una prevalenza di ultraradiazioni, di gran lunga più penetranti delle precedenti. L'assorbimento nello schermo di ferro riduce difatti l'intensità della radiazione rispettivamente del 71 % nella 1ª stazione e del 39 % nell' altra.

Volendo tentare un'indagine quantitativa e cioè volendo conoscere, almeno in approssimazione, distintamente i valori delle intensità delle varie radiazioni capaci di provocare la formazione degli ioni nell' interno della camera di ionizzazione, è necessario imporre alcune condizioni onde semplificare il problema [4]).

---

[4]) Premetto che il metodo seguito è inesatto ed artificioso, però esso può ritenersi accettabile per il solo calcolo, s'intende approssimato, delle intensità complessive delle radiazioni dovute alle sostanze radioattive distribuite nel suolo e nell'aria. Tale determinazione rappresenta invero lo scopo principale delle presenti ricerche.

Suppongo anzitutto che la radiazione totale misurata abbia solo due componenti, ciascuna di esse omogenea, e corrispondenti rispettivamente al gruppo cosmico ed a quello terrestre.

Per ciascuna stazione si hanno quindi due equazioni del tipo:

$$q = q'p' + q''p'', \qquad (1)$$

ove con q si indica il valore osservato con lo schermo o senza, con q' il numero di coppie di ioni generati nell'unità di tempo e di volume per effetto dell'ultraradiazione e con q'' il valore corrispondente invece alle radiazioni terrestri; e con p' e p'' i fattori di trasmissione nel ferro relativi ai due tipi di radiazioni.

Per indicare la stazione viene apposto alle q l'indice A per le osservazioni fuori la grotta e l'indice B per le osservazioni nella grotta. Alle p' e alle p'' vengono apposti inoltre gli indici 1 e 2 a seconda che si riferiscono a trasmissioni attraverso il solo involucro di ferro della camera di ionizzazione, il cui spessore m_1 è di cm. 0,25, oppure attraverso lo spessore $m_2 =$ cm. 5,25 del sistema schermo-involucro. I valori p'_1 e p''_1 sono dati rispettivamente dalle formule:

$$p'_1 = e^{-\mu' m_1} \quad , \quad p'' = e^{-\mu'' m_1} \quad ,$$

dove con μ' e μ'' s'indicano i coefficienti di assorbimento nel ferro relativi alle due considerate radiazioni. Analoghe espressioni si hanno per i fattori di trasmissione p'_2 e p''_2 corrispondenti allo spessore m_2.

Il coefficiente di assorbimento di massa delle ultraradiazioni nell'acqua, dedotto per le osservazioni a livello del mare [5]) è eguale a $2{,}2 \times 10^{-3}$ cm.^{2} g^{-1}, in modo che si ha:

$$\mu'_A = 1{,}4 \times 10^{-2}\, cm^{-1},$$

e di conseguenza:

$$p'_{A,1} = 0{,}996 \quad , \quad p'_{A,2} = 0{,}927.$$

Per la stazione B il valore del coefficiente μ' deve essere più basso, in quanto che, per l'azione filtrante della roccia, nell'interno dovrà aumentare la percentuale del gruppo duro delle ultraradiazioni. Non essendo possibile calcolarlo dalle osservazioni, occorre fissarne un valore almeno approssimato. Lo spessore della roccia soprastante il sito di osservazione

---

[5]) Miehlnichel E., *Höhenstrahlung.* — p. 158-938, Dresden und Leipzig.

è equivalente ad uno spessore d'acqua di metri 118 circa. A tale profondità il valore del coefficiente di assorbimento di massa dell' acqua è all'incirca $0{,}2 \times 10^{-3}$ cm.^{2}g^{-1} in modo che si ha:

$$\mu'_B = 0{,}13 \times 10^{-2}\, cm^{-1}$$

e quindi:

$$p'_{B,1} = 1{,}000 \qquad , \qquad p'_{B,2} = 0{,}993 \quad .$$

In quanto alle radiazioni terrestri mancherebbero le basi per stabilire il valore dei coefficienti di assorbimento. Le misure di radioattività delle acque hanno permesso di osservare che esse sono leggermente radioattive con un tenore in radon di 0,4 Unità Mache. Questa osservazione è sufficiente per lasciar dedurre la sicura presenza nella roccia e nell'aria della grotta di tutti i prodotti di trasformazione della serie dell'uranio-radio, ad iniziare dal radon, in equilibrio radioattivo.

D'altro canto le misure eseguite [6]) sulla radioattività delle rocce mostrano che se la radioattività delle rocce calcaree è notevolmente esigua in rapporto alla radioattività delle altre rocce, esse generalmente contengono però anche i prodotti della famiglia del torio. In media esse hanno un contenuto di radio e di torio rispettivamente di $0{,}5 \times 10^{-12}$ e di $0{,}05 \times 10^{-5}$ grammi per ogni grammo della roccia.

Vi sarebbe quindi da tener conto delle radiazioni γ emesse dalle varie sostanze delle due famiglie tra le quali radiazioni le più alte penetrabilità [7]) corrispondono: ad un gruppo di radiazioni gamma emesse dal ThC', al quale compete un coefficiente d'assorbimento nell'acqua eguale a $5{,}3 \times 10^{-2}$ e ad un gruppo di raggi gamma emessi dal RaC con un coefficiente d'assorbimento nell'acqua eguale a $5{,}5 \times 10^{-2}$.

Se la radiazione fosse omogenea, è intuitivo che, pur d' intensità diverse, alle radiazioni da parte delle sostanze radioattive contenute nel suolo e nell'aria competerebbe il medesimo coefficiente d'assorbimento.

Qualora, come è il caso, la radiazione fosse complessa, ai due gruppi corrisponderebbe un medesimo coefficiente medio d' assorbimento a condizione (non unica però) che ciascun gruppo avesse componenti della medesima natura e che le percentuali delle singole radiazioni rispetto alle intensità totali di ciascuna dei due gruppi fossero corrispondentemente le stesse. E cioè se supponiamo che ciascun gruppo abbia n componenti di intensità:

$$q'_1 \, , \, q'_2 \, , \, q'_3 \, , \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; q_n$$

[6]) Hirsch G., *Geologie und Radioaktivität*. Wien und Berlin, 1928, p. 46.

[7]) Meyer St., Schweidler E., *Radioaktivität*, 1927.

per il gruppo delle radiazioni emesse dalle sostanze radioattive nel suolo, e:

$$q''_1, q''_2, q''_3 \ldots \ldots \ldots \ldots q''_n$$

per il gruppo delle radiazioni emesse dalle sostanze radioattive nell'aria, alle quali competono rispettivamente i coefficienti di assorbimento, ad esempio, nell'acqua:

$$\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \ldots \ldots \ldots \mu_n,$$

nel caso di un raggiunto equilibrio i fattori trasmissione, corrispondenti ad un percorso x nel mezzo considerato, sono dati da:

$$e^{-\mu_s x} = \frac{q'_1}{q_s} e^{-\mu_1 x} + \frac{q'_2}{q_s} e^{-\mu_2 x} + \ldots + \frac{q'_n}{q_s} e^{-\mu_n x},$$

$$e^{-\mu_a x} = \frac{q''_1}{q_a} e^{-\mu_1 x} + \frac{q''_2}{q_a} e^{-\mu_2 x} + \ldots + \frac{q''_n}{q_a} e^{-\mu_n x};$$

avendo indicato con q_s e q_a le intensità totali, ossia:

$$q_s = q'_1 + q'_2 + \ldots \ldots + q'_n,$$
$$q_a = q''_1 + q''_2 + \ldots \ldots + q''_n,$$

e con μ_s e μ_a i coefficienti medi d'assorbimento corrispondenti rispettivamente alle radiazioni del suolo e dell'aria.

Se:

$$\frac{q'_1}{q''_1} = \frac{q'_2}{q''_2} = \ldots\ldots = \frac{q'_n}{q''_n} = \frac{q_s}{q_a},$$

ossia se le percentuali delle singole componenti pei due gruppi sono corrispondentemente le stesse, le due precedenti relazioni sono identicamente uguali e quindi:

$$\mu_s = \mu_a = \mu''.$$

Questa ipotesi è stata implicitamente ammessa nel considerare nella formula (1) complessivamente i due gruppi di radiazioni, ed inoltre è stato ancora ammesso che le medesime percentuali sono osservate per le radiazioni costituenti i due gruppi in ambedue le stazioni. Non essendo però nella possibilità di calcolare il valore di μ'', ho considerato tre distinti casi:

1°) che esso sia uguale al valore già indicato per il gruppo delle radiazioni gamma emesse dal *ThC''*;

2°) che esso sia uguale al valore corrispondente al gruppo indicato del *RaC*;

3°) che sia, per la presenza di altre radiazioni meno penetranti, eguale a $6{,}6 \times 10^{-2}$ cm^{-1}.

Di conseguenza nei tre casi avremo:

1.°) $\mu'' = 0{,}344\ cm^{-1}$
$p''_1 = 0{,}918$ $p''_2 = 0{,}164$
2.°) $\mu'' = 0{,}356\ cm^{-1}$
$p''_1 = 0{,}915$ $p''_2 = 0{,}154$
3.°) $\mu'' = 0{,}430\ cm^{-1}$
$p''_1 = 0{,}898$ $p''_2 = 0{,}105$.

Nello specchio seguente indico distintamente per le due stazioni e pei tre casi considerati i valori delle intensità per la radiazione terrestre e per quella cosmica.

	Stazione A			Stazione B				
	q'_A	q''_A	$\frac{q''_A}{q'_A}$	q'_B	q''_B	$\frac{q''_B}{q'_B}$	$\frac{q''_B}{q''_A}$	$\frac{q'_B}{q'_A}$
1.°) $\mu'' = 0{,}344$	3,36	2,69	0,80	1,38	9,38	6,81	3,45	0,41
2.°) $\mu'' = 0{,}356$	3,40	2,66	0,78	1,49	9,29	6,25	3.49	0,44
3.°) $\mu'' = 0{,}430$	3,55	2,54	0,72	1,99	8,90	4,47	3,54	0,56

Da esso si vede che al crescere del coefficiente d'assorbimento per le radiazioni terrestri in ambedue le stazioni i valori di q' tendono a crescere, mentre quelli di q'' tendono a diminuire, però le variazioni sono relativamente esigue in modo che si ha una sicura idea dell'approssimato valore delle intensità, nonchè dei rapporti delle intensità pei due gruppi corrispondenti nelle due stazioni. Il valore di q'_A risulta alquanto più elevato di quello (2,26 (J)) che, in base ai valori dell'intensità della radiazione cosmica al livello del mare ($2{,}08 \pm 0{,}07$) (J) e del coefficiente d'assorbimento nell'aria ($\mu'_1 = 2{,}56 \times 10^{-6}$ cm^{-1}), si deduce per la quota della stazione A (m. 328).

Inoltre i valori di q'_A e q'_B consentono di calcolare il coefficiente di assorbimento nella roccia ritenuta omogenea nell'ipotesi che la propagazione delle radiazioni avvenga soltanto in direzione verticale [8]).

---

[8]) Come è stato detto nella nota [4]), il metodo seguito può consentire la sola ricerca approssimata delle intensità complessive delle radiazioni dovute alle sostanze radioattive distribuite nel suolo e nell'aria. Non sarebbero quindi giustificabili gli ulteriori calcoli destinati alla determinazione dei coefficienti medi di assorbimento nel calcare per le ultraradiazioni. I detti calcoli potrebbero pertanto ritenersi utili per sole deduzioni qualitative. Nel nostro caso essi permettono di ottenere un risultato di notevole importanza geologica e logicamente accettabile.

Bisognerà però apportare alle intensità q'_A correzioni tali da ridurli ai valori q'_{A_1}, che si sarebbero osservati sul fianco esterno del monte in una stazione A_1 situata lungo la verticale passante per la stazione B. Se quindi s'indica con μ'_2 il coefficiente di assorbimento nella roccia e con $M = 9000$ *cm.* la differenza di quota tra le stazioni A_1 e A e con $m = 4700$ *cm.* lo spessore della roccia soprastante la grotta si ha:

$$q'_B = q'_A \, e^{\mu'_1 M} \, e^{-\mu'_2 m},$$

da cui si deduce:

	q'_{A_1}	μ'_2
1.°)	3,44	$1{,}95 \times 10^{-4}\ cm^{-1}$
2.°)	3,47	$1{,}81 \times 10^{-4}\ cm^{-1}$
3.°)	3,63	$1{,}28 \times 10^{-4}\ cm^{-1}$

Per avere un'idea dell'entità dei valori possiamo paragonarli con i valori che si avrebbero per il calcare in base ai noti valori del coefficiente d'assorbimento delle ultraradiazioni nell'acqua. Nel passaggio di una radiazione complessa attraverso un mezzo assorbente il coefficiente medio di assorbimento subisce rapide riduzioni, in quanto notasi un'azione filtrante da parte del mezzo, in modo che per spessori crescenti aumenta sempre più la percentuale delle radiazioni dure. Se riteniamo che il coefficiente d'assorbimento μ varii con continuità secondo la legge:

$$\mu = \mu_0 \, e^{-kx},$$

ci è possibile calcolare il valore medio di μ (μ_m) nell'attraversare uno spessore x del mezzo. Si ha così:

$$\mu_m = \frac{\mu_0}{x} \int_0^x e^{-kx} dx = \frac{\mu_0}{kx} \left[1 - e^{-kx} \right].$$

In base ai valori di μ nell'acqua precedentemente indicati si ha che per un percorso di 118 metri nell'acqua:

$$\mu_m = 0{,}83 \times 10^{-3}\ cm^{-1},$$

da cui si deduce per il calcare un coefficiente medio d'assorbimento:

$$\mu_{C_aCO_3} = 2{,}09 \times 10^{-3}\ cm^{-1}.$$

Tra questo valore ed i precedenti valori si hanno i seguenti rapporti:

10,7 , 11,5 , 16,3;

ossia l'analisi delle osservazioni lascierebbe dedurre una maggiore penetrabilità per le ultraradiazioni.

Il disaccordo potrebbe essere giustificato anzitutto col ritenere errato lo spessore della roccia soprastante la stazione, rilevato dalla sezione della grotta, oppure che la densità apparente sia più bassa di quella ammessa (2,78).

Il dedotto valore medio del coefficiente di assorbimento permetterebbe di calcolare gli spessori di roccia che nei tre casi porterebbero all'accordo, i quali spessori risultano rispettivamente eguali a

m. 4,3 ; m. 4,0 ; m. 2,9

Invero tali spessori sono notevolmente bassi e dovrebbero subire ulteriori riduzioni, in quanto che il valore medio è stato calcolato per uno spessore di 118 m. di acqua, mentre con le conseguenti riduzioni di questo, il valore medio di μ evidentemente assumerebbe valori più elevati.

Il notevole abbassamento degli spessori lascia escludere che il disaccordo possa essere giustificato, almeno soltanto, da riduzione nell'assunto valore della densità.

Le considerazioni precedenti si fondono però sul presupposto che nessun errore nè accidentale, nè sistematico affetti le osservazioni. In quanto al primo tipo di errori é lecito ammetterlo, perchè le osservazioni non hanno presentato anomalie appariscenti non giustificabili non solo nelle località in esame, ma anche in altre stazioni. Relativamente al secondo tipo di errore, la già notata elevatezza dei valori di q'_A potrebbe lasciar pensare che il valore dell'attività residua delle pareti possa risultare maggiore di quello dato dalla casa costruttrice, del quale si è tenuto conto. Questo sospetto potrà essere eliminato soltanto in seguito ad opportune misure di confronto, che non ho potuto subito eseguire.

D'altro canto da calcoli eseguiti con valori notevolmente più elevati per l'attività residua (e presumibilmente raggiungibili ma non superabili) viene sempre confermata, almeno qualitativamente, la precedente conclusione e cioè una penetrabilità delle ultraradiazioni nel calcare più elevata di quella deducibile in base ai valori osservati dei coefficienti d'assorbimento per spessori diversi di masse d'acqua [9]).

---

[9]) Qualora si ammetta che nella stazione A il valore di q'_A sia eguale a 2,26 e si lascino inalterati i fattori di trasmissione indicati nel testo; per il primo dei tre casi esaminati si deduce che gli ottenuti valori debbano subire una ulteriore riduzione di 1,07, ritenendo in tal modo che l'attività delle pareti, anzichè 0,80 J sia eguale a 1,87 J. Si ha inoltre:

$$q'_B = 0{,}31\,J \qquad \mu'_2 = 4{,}27 \times 10^{-4}.$$

Valori non molto dissimili si hanno negli altri due casi.

Bisogna ancora far osservare che altro ritocco si dovrebbe apportare ai precedenti valori per il fatto che nel calcolo dei coefficienti d'assorbimento si sono considerati solo percorsi verticali, mentre le ultraradiazioni giungono alla camera di ionizzazione anche attraverso percorsi obliqui, ma anche tale correzione, di cui si sarebbe potuto calcolare l'entità mediante opportune serie di osservazioni, non pare (in base a conclusioni altrove ottenute) che possa eliminare il disaccordo, il quale a mio parere è principalmente attribuibile all' esistenza di caverne soprastanti la galleria esplorata.

Nei riguardi delle misure di ionizzazione è opportuno osservare che i valori ottenuti all'esterno della grotta, rispettivamente in media di :

$$n_{+} = 1460 \qquad , \qquad n_{-} = 1230,$$

vengono completamente giustificati dal valore di $q'_A + q''_A$ calcolato.

Per un'intensità complessiva, corrispondente alla formazione di 6 coppie di ioni, in regime di equilibrio, il numero (n) di piccoli ioni positivi o negativi per cmc. risulta difatti eguale a

$$n = 1410,$$

valore non molto elevato rispetto alla media dei valori osservati.

Le varie serie di osservazioni eseguite nella grotta hanno dato valori presso a poco costanti per le densità ioniche di ambedue i segni.

Gli scarti delle singole osservazioni rispetto ai valori medi :

$$n_{+} = 37550 \qquad n_{-} = 34400$$

risultano sempre inferiori all'eventuale errore (4 %) da cui esse possono essere affette.

La deducibile stazionarietà delle condizioni di ionizzazione permette di ritenere che, nonostante il limitato numero di serie di osservazioni, i suddetti valori rappresentano con sufficiente approssimazione le densità relative ai piccoli ioni positivi o negativi per l'interno della grotta. L'alto valore di esse, non giustificabile in base alla sola considerazione delle radiazioni penetranti ed ultrapenetranti, anche tenendo conto dell'azione ionizzante delle radiazioni α e β da parte delle sostanze radioattive, è da attribuirsi al continuo stillicidio (effetto Lenard) che, dato il contenuto salino delle acque (bicarbonato di calcio) darebbe conto anche della prevalenza delle cariche positive.

Ricerche sulla misura della mobilità dei piccoli ioni atmosferici mediante l'apparecchio Ebert-Mache.

Nota del prof. **Giuseppe Imbò**, *presentata dal socio* **A. Carrelli**

(Adunanza del dì 9 dicembre 1939 - XVIII)

Sunto. — In base alla teoria dell'apparecchio Ebert-Mache, della quale vengono considerati nella nota i soli casi più interessanti, si deducono i criteri da seguire per il calcolo preciso delle mobilità per i singoli gruppi di piccoli ioni, nonchè delle mobilità medie approssimate sempre per i piccoli ioni. Alla teoria seguono le osservazioni eseguite all'Osservatorio Vesuviano nell'intervallo ottobre 1937-maggio 1938. Da esse oltre a dedursi una concordanza coi valori già precedentemente ottenuti, viene messa in evidenza una stretta relazione tra mobilità e condizioni meteorologiche.

Un metodo abbastanza semplice per la determinazione della mobilità media degli ioni atmosferici è quello del Gerdien nello speciale adattamento sperimentale del Mache [1]).

La semplicità del metodo deriva principalmente dal fatto che le osservazioni sono eseguite giovandosi di un normale contaioni Ebert, al cui condensatore è innestato un altro condensatore cilindrico (coassiale e di eguale diametro a quello precedente per ambedue le armature), detto precisamente « condensatore Mache ».

Seguendo i criteri generalmente suggeriti, la determinazione della mobilità media, mediante l'apparecchio Ebert-Mache, richiede due successive osservazioni, ambedue consistenti nel calcolo del numero di ioni catturati [2])

---

[1]) Gerdien H., *Die absolute Messung der elektrischen Leitfähigkeit und der spezifischen Ionen geschwindigkeit in der Atmosphäre* Phys. Zeit, 4, 1903. — Mache H., *Eine einfache Methode, die Geschwindigkeit von Gasionen zu bestimmen.* Phys. Zeit, 4, 1903. — Mache H., Schweidler von E., *Über die spezifische Geschwindigkeit der Ionen in der freien Atmosphäre.* Phys. Zeit, 6, 1905. — Hess V., *The Electrical conductivity of the atmosphere and its causes.* London, 1928. — Swann W. F. C., *On certain new atmospheric-electric instruments and methods.* Terr. Magn., 19, 1914.

[2]) Per semplicità non do le indicazioni sui segni dei potenziali dell'Ebert in quanto che, come è ovvio, essi risultano sempre di segno opposto a quello degli ioni sottoposti ad esame. Faccio ancora osservare che nelle considerazioni teoriche che saranno svolte nel corso del lavoro, s'è studiato il solo caso, applicato poi negli esperimenti eseguiti, in cui il potenziale del Mache è dello stesso segno di quello dell'Ebert.

dall' armatura interna del condensatore EBERT durante il passaggio attraverso di esso di un volume di aria $M = m\Delta t$. Ho indicato con m il volume di aria aspirata in un secondo e con Δt la durata dell'osservazione in secondi.

Per l' EBERT da me adoperato, il numero n di ioni catturati per cmc. è dato dall' espressione:

$$n = 1606{,}4 \frac{\Delta V}{u}, \qquad (1)$$

dove ΔV indica la caduta di potenziale in volts (s'intende depurata dalla caduta spontanea) osservata durante il passaggio attraverso il condensatore di una colonna d' aria della lunghezza di u ettometri ed il cui valore è direttamente letto al contatore annesso allo strumento. Se si vuole seguire il cosidetto metodo della scarica, si pone l'armatura esterna dei due condensatori a terra e si carica l'armatura interna del condensatore EBERT al voluto potenziale.

Ritenendo in un primo momento che nell' aria vi siano ioni di unica mobilità k (velocità in cm./sec. in un campo di 1 volt/cm.), si avrà la cattura totale degli ioni contenuti nell' aria che attraversa il condensatore, qualora durante l' osservazione il potenziale V_E dell' armatura interna dell' EBERT risulti:

$$V_E > \frac{m}{4\pi C_E k}, \qquad (2)$$

dove con C_E ho indicato la capacità del condensatore EBERT. La detta condizione, come è noto, corrisponde al regime di saturazione.

Le due osservazioni consigliate per la misura di k sono le seguenti:

1ª. misura della densità ionica n_0, che si ottiene operando in regime di saturazione all'EBERT e ponendo a terra l'armatura interna del MACHE;

2ª. misura del numero di ioni n_i per cmc. catturati dall' armatura interna dell'EBERT, per un potenziale dell'EBERT eguale a quello primitivo e per un potenziale dell'armatura interna del condensatore MACHE mantenuto costantemente durante l'osservazione ad un valore V_M in modo da stabilirvi condizioni di regime ohmico; e cioè, se indico con C_M la capacità dei conensatore MACHE, deve aversi:

$$V_M < \frac{m}{4\pi C_M k}. \qquad (3)$$

Di conseguenza il numero di ioni n_i, ottenuto nella seconda osservazione, risulta eguale alla differenza tra il valore della densità ionica ed il numero di ioni per cmc. captati dall'armatura interna del MACHE.

Ricordando che in regime ohmico il numero totale N di ioni catturati in un tempo Δt è dato dall'espressione:

$$N = 4\pi C_M \, n_0 k \, V_M \Delta t, \tag{4}$$

si ha:

$$n_i = n_0 - \rho_M n_0 \, k \, V_M, \tag{5}$$

avendo posto:

$$\rho_M = \frac{4\pi C_M}{m}. \tag{6}$$

È di conseguenza evidente la possibilitá di calcolare la mobilità del gruppo considerato di ioni, in quanto che nella (5) figurano tutte quantità note ad eccezione di k.

Tenuto conto che nell'aria vi sono ioni di mobilità molto diverse, generalmente si ritiene che il valore di k, così ottenuto, corrisponde alla mobilità media dei piccoli ioni.

Per avere però un' idea del preciso significato da assegnare al detto valore di k, considero ora alcune particolarità della teoria dell'Ebert-Mache, finora, a quel che mi consta, non ancora studiate, cercando inoltre di mettere in evidenza varie possibilità d'indagini del metodo e nello stesso tempo di dedurre i criteri del modo come condurre le osservazioni con miglior vantaggio.

Considero il solo caso di una distribuzione discontinua nelle mobilità, e cioè suppongo che nell'aria vi siano p gruppi di ioni ai quali corrispondono le densità (numero di ioni per cmc.):

$$n_{0,1} \; ; \; n_{0,2} \; ; \; . \; . \; . \; ; \; n_{0,p} \; ,$$

e rispettivamente le mobilità:

$$k_1 \; ; \; k_2 \; ; \; . \; . \; . \; ; \; k_p \; ,$$

ordinate per valori decrescenti.

Ritengo inoltre che il potenziale V_E determini nel condensatore Ebert un regime di saturazione per i primi $s < p$ gruppi, e condizioni di regime ohmico per i rimanenti $p - s$ gruppi.

Di conseguenza per $V_M = 0$ il numero n_0 di ioni per cmc., captati durante l' aspirazione dall' armatura interna dell' Ebert, è evidentemente dato dall'espressione:

$$n_0 = \sum_{1}^{s} n_{0,i} + \rho_E \, V_E \sum_{s+1}^{p} n_{0,j} \, k \, , \tag{7}$$

avendo posto:

$$\rho_E = \frac{4\pi C_E}{m}. \tag{8}$$

Nel caso in cui sia $V_M \neq 0$, l'azione del condensatore MACHE si manifesta principalmente in una riduzione della corrente ionica e cioè la corrente d'aria nella regione intermedia tra i due condensatori avrà una zona periferica (delimitata dall'armatura esterna di raggio R e da altra superficie cilindrica coassiale col sistema, di raggio R_c) del tutto priva di ioni.

Queste deduzioni ed anche quelle che seguiranno presuppongono però il verificarsi di condizioni teoriche non riscontrate in pratica, ad esempio: assenza di fenomeni di diffusione, il quale effetto però, data l'alta velocità di aspirazione, può ritenersi trascurabile [3]). Come pure viene ammesso che le traiettorie degli ioni all'uscita dal campo del condensatore MACHE, e precisamente non appena che questi raggiungano la sezione normale all'armatura interna e passante per il suo bordo estremo, risultano parallele all'asse del sistema dei due condensatori. Affinchè l'ione possa uscire dal campo, è necessario però che la sua distanza y dall'asse all'ingresso nel campo obbedisca alla condizione $y > y_0$, dove y_0 (che per semplicità in seguito chiamerò *raggio d'azione*) è dato della relazione

$$y_0^2 = r^2 + 4 \frac{V_M C_M}{U} k_i, \tag{9}$$

in cui r è il raggio dell'armatura interna ed U è la velocità della corrente d'aria nel condensatore. In base alla classica teoria del GERDIEN si deduce difatti che tutti gli ioni, che hanno una distanza iniziale dall'asse eguale a y_0, cadranno sul bordo estremo dell'armatura interna del MACHE.

Risulta quindi ovvio che nella zona intermedia tra i due condensatori saranno presenti i soli ioni che prima dell'ingresso nel campo descrivevano traiettorie parallele all'asse del sistema e situate a distanze y' dall'asse, per le quali si abbia:

$$y_0 < y' < R. \tag{10}$$

Ne consegue che nella detta zona intermedia le traiettorie degli ioni saranno delimitate all'interno dalla superficie cilindrica di raggio r ed all'esterno dalla superficie cilindrica di raggio R_c (raggio della corrente

---

[3]) Esperienze del KOHLRAUSCH. — HESS., *The Electrical conductivity* ecc.

ionica) le cui generatrici corrispondono alle traiettorie degli ioni che prima dell'ingresso nel campo erano situate a distanza rispettivamente y_0 e R dall'asse. La superficie cilindrica di raggio R_c, dato dalla relazione:

$$R_c^2 = R^2 - 4 \frac{V_M C_M}{U} k_i \, , \tag{11}$$

delimita appunto la zona periferica completamente priva di ioni.

Potrebbe ancora sorgere il dubbio che in seguito all'avvicinarsi degli ioni all'asse per effetto del campo possa ottenersi un'alterazione nella densità. È ovvio che, non apportando il campo dovuto al condensatore nessuna alterazione nella distribuzione ionica in senso parallelo all'asse, il rapporto delle densità per volumi corrispondenti nelle due zone considerate (e cioè prima che l'aria passi per il campo del condensatore MACHE e dopo l'uscita da questo) viene dato dal rapporto inverso delle sezioni. Nel nostro caso, la sezione della corrente ionica nella seconda zona e la sezione corrispondente alla detta corrente nella prima zona sono date rispettivamente da: $\pi(R_c^2 - r^2)$, e da: $\pi(R^2 - y_0^2)$. Se a R_c e a y_0 si sostituiscono i valori dati dalla (11) e dalla (9), i due valori risultano uguali e di conseguenza risulteranno uguali anche le densità ioniche.

Le precedenti considerazioni lasciano quindi concludere che mentre per uno qualsiasi dei primi s gruppi, pei quali distintamente vige la (5), il rispettivo numero di ioni captati dall'armatura interna decresce linearmente al crescere di V_M, per qualsiasi altro gruppo dei rimanenti $p - s$ si ha invece pei detti numeri dapprima un valore costante ed indi un comportamento identico a quello corrispondente ai primi s gruppi. Da quello che è stato avanti esposto, la costanza è data dalla condizione che il raggio della corrente ionica risulti maggiore del raggio d'azione corrispondente al condensatore EBERT; mentre l'eguaglianza tra i due raggi segna il passaggio dalla costanza a quello di diminuzione progressiva nel numero di ioni captati dall'armatura interna dell'EBERT al crescere del potenziale V_M del MACHE.

Analiticamente per un gruppo qualsiasi q, tale che sia:

$$p \geq q \geq s + 1 \, , \tag{12}$$

le due condizioni sono date dalla relazione

$$R^2 - 4 \, k_q \frac{V_M C_M}{U} \geq r^2 + 4 \, k_q \frac{V_E C_E}{U} \; ; \tag{13}$$

ossia il potenziale V_M deve risultare:

$$V_M \leq \frac{1}{\rho_M k_q} - \frac{C_E}{C_M} V_E . \qquad (14)$$

Volendo rappresentare graficamente, e distintamente pei vari gruppi, la relazione tra il numero di ioni catturati dall'armatura interna dell'EBERT (ordinate) ed il potenziale V_M del MACHE (ascisse) si avrebbero: tratti variamente inclinati sull'asse dei potenziali pei primi s gruppi e con ascisse degli estremi date da

$$V_{M_1} = 0 \quad , \quad V_{M_2} = \frac{1}{\rho_M k} ; \qquad (15)$$

tratti presentanti dapprima un andamento orizzontale e poi, come pei gruppi precedenti, un andamento inclinato sull'asse delle ascisse. I potenziali degli estremi sono dati dai medesimi valori (15), mentre quello del vertice è dato da:

$$V'_M = \frac{1}{\rho_M k} - \frac{C_E}{C_M} V_E . \qquad (16)$$

Vi sarebbero infine tratti costantemente orizzontali in corrispondenza dei gruppi a piccolissima mobilità e pei quali, nel campo di variazione di V_M non viene raggiunto il valore dato dalla (16).

Il diagramma complessivo consisterà quindi in una spezzata con ascisse dei vertici date dalla seconda delle (15) o dalla (16).

Le considerazioni precedentemente svolte permettono inoltre di dedurre con facilità l'equazione pei vari tratti. Per il I° tratto, essa è data da:

$$n_1 = \sum_1^s n_{0,i} - \rho_M \; V_M \sum_1^s n_{0,i} k_i + \rho_E \; V_E \sum_{s+1}^p n_{0,j} k_j . \qquad (17)$$

Per il secondo tratto bisogna distinguere a seconda che l'ascissa del I° vertice sia data dalla seconda delle (15) o dalla (16). Nel primo caso (*tipo a*), che corrisponde alla completa cattura degli ioni del primo gruppo da parte dell'armatura interna del MACHE, mentre per tutti gli altri gruppi permane la medesima distinzione iniziale; l'equazione del secondo tratto è:

$$n_{2_a} = \sum_2^s n_{0,i} - \rho_M \; V_M \sum_2^s n_{0,i} k_i + \rho_E \; V_E \sum_{s+1}^p n_{0,j} k_j . \qquad (18)$$

Nell'altro caso (*tipo b*) che corrisponde invece al caso in cui si verificano

condizioni diverse dalle iniziali solo per l' $(s+1)^{mo}$ gruppo (per il quale si sia raggiunto nel vertice l'eguaglianza tra il raggio di azione per l'EBERT ed il raggio della corrente ionica), si ha:

$$n_{2_b} = \sum_{1}^{s+1} n_{0,i} - \rho_M \; V_M \sum_{1}^{s+1} n_{0,i} k_i + \rho_E \; V_E \sum_{s+2}^{p} n_{0,j} k_j . \qquad (19)$$

Se si confrontano i valori assoluti delle derivate rispetto a V_M delle: (17). (18), (19), si ottengono le seguenti disuguaglianze:

$$\left| \frac{d n_{2_b}}{d V_M} \right| > \left| \frac{d n_1}{d V_M} \right| > \left| \frac{d n_{2_a}}{d V_M} \right| , \qquad (20)$$

le quali dimostrano evidentemente che la pendenza del 2° tratto rispetto all'asse delle ascisse risulta per il primo tipo (*tipo a*) minore e per il secondo tipo (*tipo b*) maggiore della pendenza del primo tratto. Si ha quindi la possibilità di eliminare mediante il grafico l'eventuale difficoltà sulla scelta dell'equazione valida per il secondo tratto.

Analoghe considerazioni varranno per gli altri vertici e per gli altri tratti. Consideriamo quindi in generale il tratto *q.mo*. Esso sarà evidentemente preceduto da $q-1$ vertici e se indichiamo con v_a il numero dei vertici pei quali è applicabile la detta relazione (15) e con $v_b = q - 1 - v_a$ il numero dei vertici pei quali è applicabile la relazione (16), l'equazione valida per il detto tratto sarà:

$$n_q = \sum_{v_a+1}^{s+v_b} n_{0,i} - \rho_M \; V_M \sum_{v_a+1}^{s+v_b} n_{0,i} k_i + \rho_E \; V_E \sum_{s+v_b+1}^{p} n_{0,j} k_j . \qquad (21)$$

Nelle discussioni precedenti i vertici sono stati considerati distinti, mentre non è da escludere la possibilità di coincidenze tra un vertice di tipo *a*, cui corrisponde una mobilità k_i, con un vertice di tipo *b*, cui corrisponde una mobilità k_j. La condizione per il verificarsi di una coincidenza è data dalla relazione:

$$\frac{k_i - k_j}{k_i \; k_j} = \rho_E \; V_E . \qquad (22)$$

È inoltre evidente che nel caso in esame, anzi in generale (in quanto non risulta possibile distinguere a vista i vertici doppi da quelli semplici), non possono più considerarsi validi i criteri dedotti dalla (20) per la decisione sulle equazioni da applicare pei vari tratti a seconda della natura

del vertice che li precede. Difatti la pendenza del tratto partente da un vertice doppio risulta maggiore, eguale, oppure minore della pendenza del tratto precedente a seconda che si avrà:

$$n_{0,(v_a+1)}\, k_{(v_a+1)} - n_{0,(s+v_b+1)}\, k_{(s+v_b+1)} \gtreqless 0. \tag{23}$$

L'insieme delle considerazioni eseguite permette di dedurre che tra i supposti p gruppi di ioni presenti nell'aria ve ne possono essere alcuni ai quali nel grafico corrisponde un solo vertice, altri ai quali corrispondono due vertici ed altri ancora ai quali non corrisponde alcun vertice. L'assenza di vertici può essere data: o dal fatto che entro il campo di variazione di V_M, per gruppi pei quali inizialmente vige nell'Ebert il regime ohmico, non viene raggiunto il valore dato dalla (16); oppure nel caso che tra le densità ioniche e le mobilità corrispondenti a due distinti gruppi sussista la relazione:

$$\frac{n_{0,(v_a+1)}}{n_{0,(s+v_b+1)}} = \frac{k_{(s+v_b+1)}}{k_{(v_a+1)}}. \tag{24}$$

Un'analisi esatta del grafico potrebbe pertanto eseguirsi, soltanto qualora si spingano le misure fino al valore di V_M, cui corrisponderebbe $n = 0$, in quanto che, procedendo per valori decrescenti del potenziale, sarebbe agevole mettere in evidenza tutte le particolarità del grafico.

È opportuno però osservare che in generale si ha:

$$n_{0,(v_a+1)}\, k_{(v_a+1)} >> n_{0,(s+v_b+1)}\, k_{(s+v_b+1)}, \tag{25}$$

e quindi le considerazioni svolte sul doppio tipo di vertici hanno una importanza più teorica che pratica, in quanto che i vertici di tipo b vengono quasi a scomparire nel grafico. Di conseguenza risultano trascurabili gli errori che si commettono ammettendo l'esistenza di soli vertici di tipo a, specialmente nel caso in cui si voglia limitare l'analisi ai soli primi tratti che si ottengono spingendo le osservazioni fino a raggiungere valori di V_M non superanti i *100 volts.*

Ciò premesso, si può ora procedere alla ricerca del metodo per la determinazione delle mobilità che potranno ottenersi: o in base alla conoscenza del potenziale corrispondente al vertice e mediante l'applicazione della (15), oppure in base alle equazioni di due tratti consecutivi, in quanto che dalla loro differenza si ottiene:

$$n_{(v_a+1)} = n_{0,(v_a+1)} - \rho_M\, V_M\, n_{0,(v_a+1)}\, k_{(v_a+1)}, \tag{26}$$

equazione che permetterebbe anche il calcolo delle densità ioniche.

È d'altronde evidente che nel caso di un vertice di tipo b le equazioni da applicare sarebbero la (16) oppure l'altra, ottenuta come precedentemente:

$$n_{(s+v_b+1)} = n_{0,(s+v_b+1)} - (\rho_M V_M + \rho_E V_E) n_{0,(s+v_b+1)} k_{(s+v_b+1)} . \quad (27)$$

Limitando invece le osservazioni ad un solo tratto, ad esempio al *q.mo*, i valori di n (che indico con n_q) direttamente ottenuti per almeno due valori di V_M consentiranno il calcolo delle costanti $n'_{0,q}$ e di c le quali compaiono nell'equazione del tratto, data da:

$$n_q = n'_{0,q} - c V_M . \quad (28)$$

Nell'ipotesi generale della possibile ed evidente esistenza del doppio tipo di vertici si ha:

$$n'_{0,q} = \sum_{v_a+1}^{s+v_b} n_{0,i} + \rho_E V_E \sum_{s+v_b+1}^{p} n_{0,j} k_j , \quad (29)$$

$$c = \rho_M \sum_{v_a+1}^{s+v_b} n_{0,i} k_i ; \quad (30)$$

mentre nell'ipotesi della sola presenza di vertici di tipo a si ha:

$$n'_{0,q} = \sum_{q}^{s} n_{0,i} + \rho_E V_E \sum_{s+1}^{p} n_{0,j} k_j , \quad (31)$$

$$c = \rho_M \sum_{q}^{s} n_{0,i} k_i . \quad (32)$$

Il valore della mobilità media $(k_m)_q^s$ per i gruppi compresi tra il *q.mo* e l'*s.mo* è evidentemente dato dalla espressione:

$$(k_m)_q^s = \frac{\sum_{q}^{s} n_{0,i} k_i}{\sum_{q}^{s} n_{0,i}} . \quad (33)$$

Limitando le nostre considerazioni al solo secondo caso, mentre il numeratore della (33) viene direttamente dato dalla (32), non è possibile ottenere il valore del denominatore. Supponendo però trascurabile nella (31) il secondo termine del secondo membro si ha:

$$(\overline{k})^s_q = \frac{c}{\rho_M n'_{0,q}}, \qquad (34)$$

avendo con $\overline{k}$ denotato il particolare valore approssimato della mobilità, che così si ottiene.

Per il primo tratto il valore $(\overline{k})^s_1$ è quindi dato dalla espressione:

$$(\overline{k})^s_1 = \frac{\sum_1^s n_{0,i} k_i}{\sum_1^s n_{0,i} + \rho_E V_E \sum_{s+1}^p n_{0,j} k_j}, \qquad (35)$$

e di conseguenza a rigore il detto valore non potrebbe ritenersi corrispondente alla mobilità media dei piccoli ioni (e cioè degli ioni pei quali si abbia $k > \frac{1}{\rho_E V_E}$), come è stato considerato dalla totalità degli sperimentatori.

La (35) mostra difatti che il valore di $\overline{k}$ dipende dal potenziale V_E anche nell'ipotesi che non vi sia alcuno spostamento di gruppo (e cioè che si conservi sempre la medesima distinzione stabilita all'inizio per i p gruppi di ioni presenti nell'aria) derivante dal fatto che non tutti gli osservatori operano al medesimo potenziale V_E.

Per avere una stima dell'ordine di grandezza delle correzioni che si dovrebbero apportare ai valori di $\overline{k}$ che si ottengono al variare del potenziale dell' Ebert, scelgo come esempio le distribuzioni ioniche all' Osservatorio Vesuviano e nel fondo del cratere, limitatamente però agli ioni positivi [4]).

Si ha difatti:

Gruppo	Osservatorio Ves.		Fondo del cratere	
	n_+	k_+	n_+	k_+
1°	1892	1.47	1427	1.47
2°	652	0.23	814	0.10
3°	41500	0.0003	101100	0.0003

[4]) Imbò G. — *Densità ioniche all' Osservatorio e nel fondo del cratere vesuviano.* Bull. Volc. N^{os} 27 à 30, Napoli 1931.

Mediante l'applicazione della formula (35) ho calcolato pei potenziali 100, 150, 200 dell'Ebert i valori di $\overline{k}$ che sono segnati nel quadro seguente, nel quale in corrispondenza di ciascuna delle due stazioni è indicato anche il valore di k_m ossia delle effettive mobilità medie degli ioni appartenenti ai primi due gruppi, pei quali nell'Ebert (per tutti e tre i potenziali indicati) vige un regime di saturazione.

Valori di $\overline{k}$ *per* $V_E =$

	100	150	200	k_m
Osservatorio Ves.	1.12	1.10	1.07	1.19
Fondo del cratere	0.84	0.78	0.73	0.97

Dal quadro risulta evidente l'influenza di V_E sul valore della ritenuta media mobilità, il quale valore si discosta maggiormente da quello esatto, quanto più cresce il potenziale dell'Ebert. Di conseguenza si deduce che specialmente nelle stazioni ove il tenore in ioni grossi risulta abbastanza elevato, le osservazioni eseguite secondo le norme generali danno valori medi delle mobilità pei piccoli ioni sempre più bassi di quelli esatti.

L'esatto valore medio k_m può ottenersi alle dette condizioni mediante le deduzioni di $\overline{k}$ per due valori del potenziale dell'armatura interna dell'Ebert e precisamente in base alla formola:

$$k_m = \overline{k}_1 \, \overline{k}_2 \frac{V_{E_2} - V_{E_1}}{\overline{k}_2 \, V_{E_2} - \overline{k}_1 \, V_{E_1}} . \qquad (36)$$

La fedele esecuzione delle osservazioni secondo le norme dettate per l'uso dell'Ebert-Mache può inoltre causare una ulteriore riduzione nel valore di $\overline{k}$, per il fatto che tra i consigliati valori del potenziale (3-15 volts) al quale deve essere mantenuto l'armatura interna del Mache durante l'osservazione, vi sono valori corrispondenti al 2° tratto del grafico. Difatti il valore di V_M, corrispondente al primo vertice (s'intende di *tipo a*) risulta uguale a 8.9 volts [5]).

È necessario però far rilevare che, per tener conto delle deduzioni

[5]) Il calcolo di V_M è stato eseguito in base alla formola (12) ritenendo $k = 1.63$, il quale valore risulta il più elevato che figura nella tabella delle mobilità data da: Hess-*The Electrical Conductivity* ecc.

teoriche dello SWANN [6]), sperimentalmente accertate, il detto valore di V_M è stato ottenuto ponendo per C_M il valore dedotto in base ad osservazioni dirette invece del valore che si otterrebbe mediante l'applicazione della formola:

$$C_M = \frac{l}{2 \log_e \frac{R}{r}} . \qquad (37)$$

Per l'apparecchio adoperato all'Osservatorio Vesuviano il valore di C_M, dedotto sperimentalmente, risulta eguale a 6.5, invece di 3.3 che si ottiene dalla (37).

Guidato dai vari criteri accennati, ho voluto determinare per l'Osservatorio Vesuviano mediante l'apparecchio EBERT-MACHE le mobilità dei piccoli ioni. Ho però operato soltanto fino a potenziali dell'armatura interna del MACHE di circa 50-60 volts, soltanto raramente sorpassati [7]).

Allo scopo di avere la possibilità di eseguire osservazioni a qualsiasi ora e nelle possibili diverse condizioni meteorologiche, e nello stesso tempo per cercare di eliminare l'influenza del campo elettrico terrestre, l'apparecchio è stato disposto nel vano di un'ampia finestra rivolta a tramontana [8]).

Le osservazioni sono state eseguite nell'intervallo ottobre 1937-maggio 1938. Il potenziale iniziale dell'armatura interna dell'EBERT è stato di circa 180 volts e la velocità di aspirazione della corrente di aria si è aggirata intorno al valore di 100 $\frac{\text{m.}}{\text{min.}}$, in modo da stabilire inizialmente nel condensatore EBERT un regime di saturazione per gli ioni a mobilità $k \geq 0{,}046$ Le condizioni finali non differiscono sensibilmente da quelle iniziali. La massima caduta di potenziale ottenuta difatti negl'intervalli di osservazioni (e cioè durante due minuti di aspirazione) è stata di circa 10 volts. In ogni

---

[6]) SWANN U. G., *The theory of electrical dispersion into the free atmosphere* ecc. Terr. Magn., 1914.

[7]) Pei gruppi, pei quali inizialmente l'EBERT è in condizioni di regime ohmico e poi al crescere di V_M viene raggiunto il valore V'_M dato dalla (16), si ha in generale un valore di n_1 per il I⁰ tratto relativamente piccolo. Questa considerazione, unitamente al fatto che tra i potenziali dei due vertici, corrispondenti a ciascuno dei detti gruppi, vi è (per l'apparecchio da me adoperato e per potenziali dell'EBERT di 180 volts) una costante differenza di 310 volts, porta alla conclusione che (per la conseguente debole pendenza del tratto obliquo, ed anche per il ristretto campo di variazione dei potenziali adoperati per il MACHE) non si ha alcun errore sensibile, ritenendo presenti nel diagramma i soli vertici di tipo *a*.

[8]) È opportuno osservare che per la determinazione delle mobilità l'ultima precauzione non era necessaria.

giornata di osservazione si é proceduto in modo che ciascuna serie, comprendente diverse misure di cadute di potenziale in corrispondenza a potenziali diversi dell' armatura interna del condensatore MACHE, fosse compiuta nel minore tempo possibile [9]).

A tale scopo la prima osservazione della serie è stata eseguita per $V_M = 0$, e le successive per valori di V_M crescenti (in valore assoluto) approssimativamente di 2 volts da osservazione a osservazione fino a raggiungere circa 20 volts ed indi a maggiori intervalli fino al potenziale di 50-60 volts. Qualche serie è stata spinta fino a 150 volts. A chiusura della serie, ed anche spesso nel corso di essa, è stata ripetuta l'osservazione per $V_M = 0$, allo scopo di accertare la necessaria costanza delle condizioni iniziali di ionizzazione. In caso di sensibile variazione, le serie ottenute sono state scartate. Le serie si sono susseguite alternativamente per gli ioni positivi e per gli ioni negativi. Inoltre ciascuna serie, della durata di circa 35-40 minuti, è stata preceduta e seguita da misure della dispersione naturale. I risultati ottenuti nelle osservazioni iniziale e finale sono stati presso a poco sempre identici in modo da dimostrare che, nonostante la relativamente lunga durata di ciascuna serie, la eventuale e temuta azione da parte dei depositi attivi poteva considerarsi trascurabile [10]).

Per ridurre nelle ricerche delle mobilità le influenze da parte degli inevitabili errori di osservazione [11]) ed anche da parte delle variazioni, se pur lievi, nelle condizioni iniziali di ionizzazione, anzichè analizzare singolarmente le varie serie, ho ritenuto più vantaggioso di raggruppare opportunamente i valori ottenuti, di procedere poi alla formazione delle medie e di eseguire infine i calcoli necessari sulle medie dei valori di n e dei corrispondenti valori di V_M. Invero la notevole variabilità dei valori di n ottenuti per $V_M = 0$ in 230 osservazioni per gli ioni positivi ed in 265 per quelli negativi rendeva ingiustificata la formazione di un unico gruppo di valori medi. Per evitare una distribuzione arbitraria dei valori medi negli eventuali diversi raggruppamenti, ho voluto esaminare l'andamento delle frequenze ossia del numero delle volte che si sono presentati valori di n

---

[9]) Bisogna osservare che le osservazioni sono state sempre eseguite a potenziale dell' armatura interna del MACHE e dell' EBERT del medesimo segno e di segno opposto a quello degli ioni dei quali si voleva misurare la mobilità. In qualche giornata ho anche eseguito la misura del numero dei piccoli ioni con o senza il condensatore MACHE, venendo nei due casi ai medesimi risultati.

[10]) Nonostante la detta constatazione, relativa alla possibilità di considerare nulla o trascurabile l' azione da parte dei depositi attivi, tra le varie serie si è avuta sempre cura di pulire accuratamente con panno di tela i due condensatori.

[11]) L' errore relativo $\frac{\Delta n}{n}$, che si commette nelle misure, è variabile con ΔV_E, ossia con la caduta di potenziale all' EBERT: in media esso risulta eguale a 0,10.

compresi entro particolari intervalli. Nella tabella seguente do le frequenze per gli ioni positivi e negativi procedendo per intervalli di 500 ioni tra 0 e 8500.

Intervallo	Frequenza	
	Ioni positivi	Ioni negativi
0-499	—	—
500-999	1	. .
1000-1499	2	4
1500-1999	9	24
2000-2499	34	42
2500-2999	54	55
3000-3499	41	25
3500-3999	24	30
4000-4499	17	13
4500-4999	6	17
5000-5499	9	16
5500-5999	17	18
6000-6499	10	15
6500-6999	5	5
7000-7499	1	—
7500-7999	—	1
8000-8499	—	—
Totale	230	265

I dati della tabella e più evidentemente i grafici costruiti in base ai detti valori (vedi figg. 1 e 2), mostrano, nell'andamento delle frequenze, sia per gli ioni positivi che per i negativi, la presenza di due massimi ai quali corrispondono rispettivamente i valori:

	n_+	n_-
I	2970	2650
II	5750	5650

I valori del massimo principale (ossia del primo) risultano presso a poco eguali ai valori medi già ottenuti all'Osservatorio Vesuviano in precedenti ricerche. Senza voler dare per ora una spiegazione della presenza del massimo anormale, voglio però fare osservare che le giornate ad alto tenore ionico corrispondono in generale alle giornate piovose e nebbiose [12]).

[12]) Avrò occasione di soffermarmi sull'argomento in altra pubblicazione nella quale saranno studiate per la medesima stazione le variazioni orarie e stagionali del numero dei piccoli ioni e della conducibilità.

Il notato comportamento mostra quindi l'opportunità di formare due distinti gruppi. Per gli ioni positivi ho scelto come valori estremi di n (per $V_M = 0$) per il primo gruppo (gruppo normale): 1800-4100, e per il

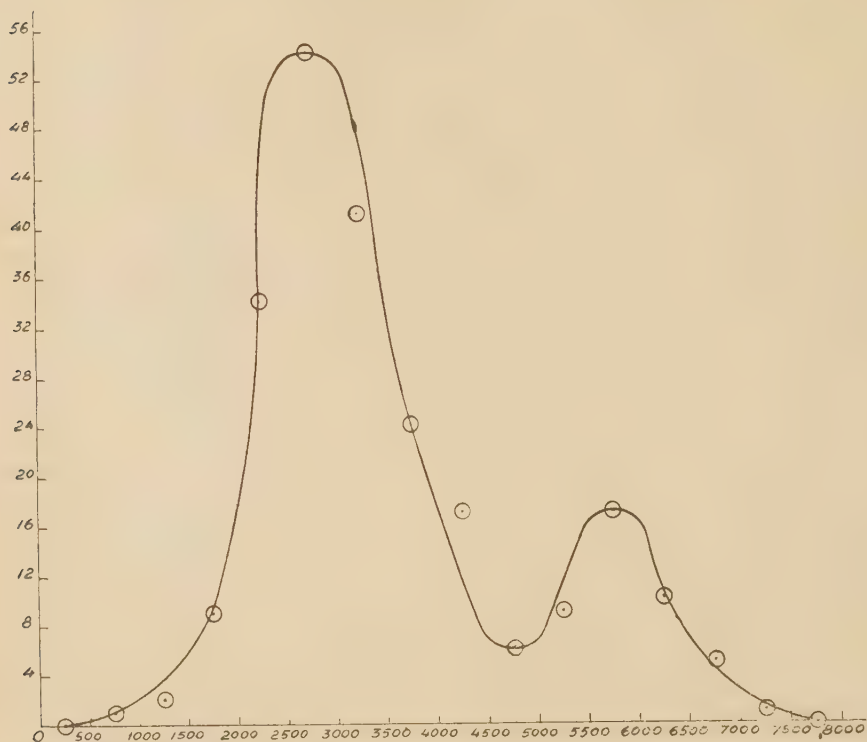



Fig. 1 - Curva di frequenza per gli ioni positivi

secondo gruppo (anormale): 5100-6300. Per gli ioni negativi si ha rispettivamente: 1550-3750; 4850-6650.

Nelle tabelle seguenti do sia per gli ioni positivi che per gli ioni negativi, e distintamente per i gruppi normale ed anormale, i valori medi di V_M e di n ed ancora il numero N_0 di osservazioni utilizzate per le singole medie.

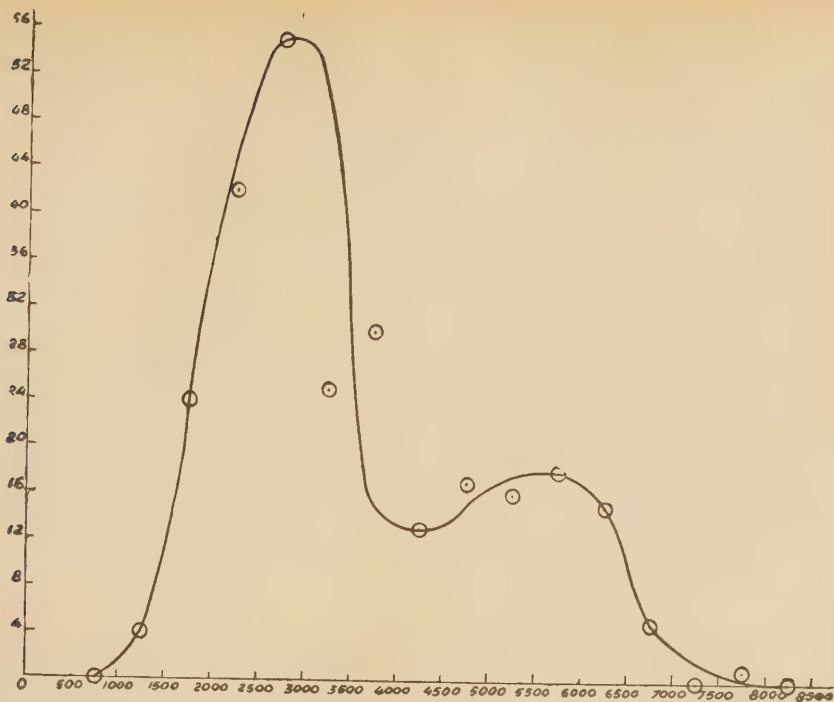



Fig. 2 - Curva di frequenza per gli ioni negativi

IONI POSITIVI

Medie normali			Medie anormali		
N_0	V_M	n_+	N_0	V_M	n_+
185	0	2975	38	1.2	5528
18	1.7	2847	17	4.6	4615
7	2.5	2721	15	8.6	4155
17	3.5	2663	9	14.9	3323
6	4.7	2600	9	25.8	2743
36	5.7	2493	8	40.3	1776
28	9.7	2273	1	54.3	551
65	16.4	1897	2	69.5	310
33	26.0	1525	1	83.2	388
48	36.4	1078			
13	45.0	930			
23	84.0	300			
5	139.1	253			
2	200.8	87			

IONI NEGATIVI

Medie normali			Medie anormali		
N_0	V_M	n_-	N_0	V_M	n_-
178	0	2620	40	1.2	5737
28	1.8	2636	25	5.3	4475
10	2.3	2685	8	9.8	3491
24	3.6	2435	5	14.4	3060
5	4.7	2152	5	19.6	2738
36	5.5	2208	7	27.6	1990
12	6.4	2195	7	37.4	1214
20	7.7	1980	1	45.4	948
30	9.7	1785	2	54.4	552
4	10.8	1731	2	69.5	428
20	14.3	1510	2	83.3	198
15	17.9	1411			
15	19.5	1179			
8	26.3	745			
13	44.9	616			
14	54.5	425			
8	69.4	373			
16	84.7	240			
4	131.7	165			

Nelle figure 3 e 4 sono date le rappresentazioni grafiche degli andamenti normali di n (ordinate) in funzione di V_M (ascisse) sia per gli ioni positivi che per gli ioni negativi. Vi si distinguono nettamente i vari

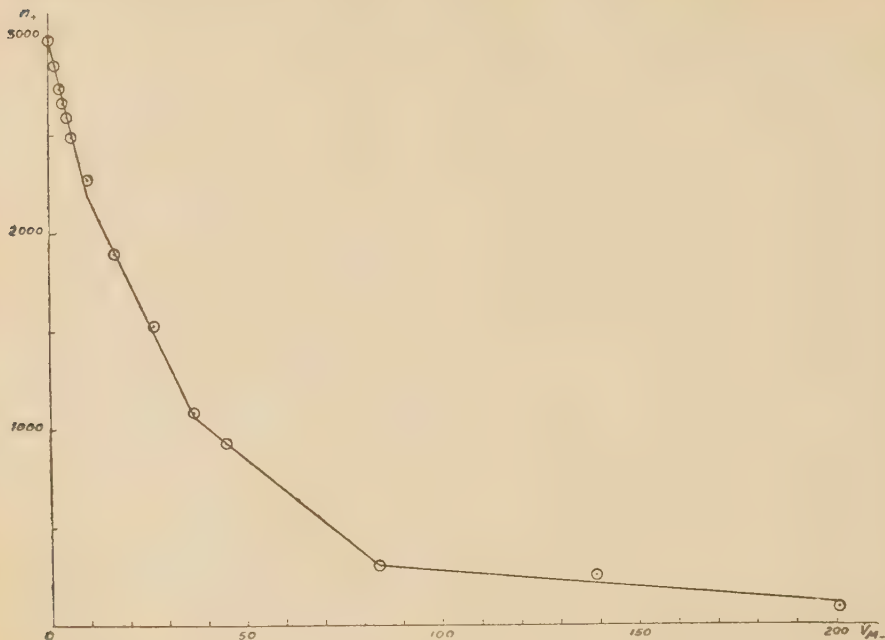



Fig. 3 - Numero (n_+) di ioni positivi per cmc captati dall'armatura interna dell'Ebert in funzione del potenziale V_{M-} dell'armatura interna del condensatore Mache

tratti corrispondenti ai vari gruppi a mobilità diverse. Limitando le analisi ai soli primi tre tratti per gli andamenti normali ed ai primi due per quelli anormali, ho calcolato mediante il metodo dei minimi quadrati i valori delle costanti $n'_{q,o}$ e c che figurano nell'equazione del tratto, data dalla (38) e successivamente i valori di $\overline{k}$ dati dalla (34) ed anche i valori delle mobilità k (corrispondenti ai primi tre gruppi per le giornate ad andamento normale ed invece ai primi due per le giornate ad andamento anormale) dedotte in base alla (26), oppure in base alle ascisse del rispettivo vertice.

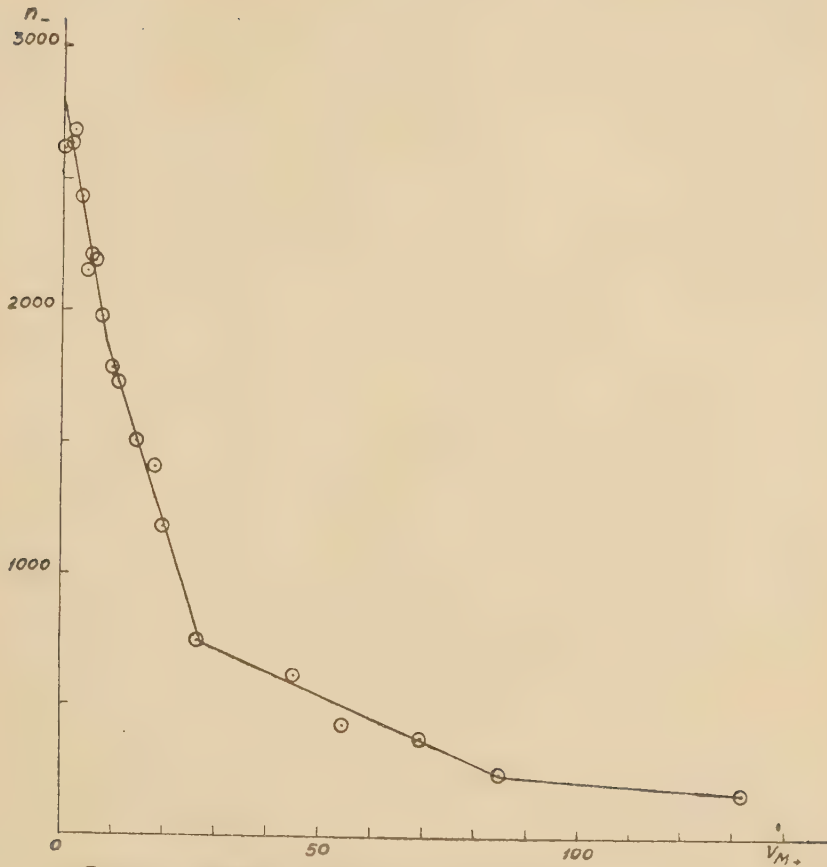



Fig. 4 - Numero (n_-) di ioni negativi captati dall'armatura dell'Ebert in funzione del potenziale V_{M+} dell'armatura interna del condensatore Mache

Il quadro seguente dà i vari valori indicati.

				$n'_{q,0}$	c	V_M	$\overline{k}$	k
IONI	POSITIVI	Andamento normale	1° tratto	2967	83.10	9.3	0.40	1.55
			2° tratto	2576	40.98	37	0·23	0.39
			3° tratto	1657	16.15	84	0.14	0.17
		Andamento anormale	1° tratto	5646	183.44	11.29	0.47	1.28
			2° tratto	4267	61.22	55	0.21	0.26
	NEGATIVI	Andamento normale	1° tratto	2789	105.64	8.6	0.55	1.68
			2° tratto	2413	62.03	27	0.37	0.53
			3° tratto	994	8.95	85	0.13	0.17
		Andamento anormale	1° tratto	6106	307.81	8.7	0.73	1.66
			2° tratto	4059	71.63	48	0.26	0.30

Da esso si deduce innanzitutto che le più alte mobilità nei giorni normali sia per gli ioni positivi che per i negativi risultano pressochè concordanti coi valori precedentemente trovati per la medesima stazione. Nei giorni anormali mentre le mobilità risultano alquanto più basse di quelle precedenti, con una differenza lieve per gli ioni negativi e notevole per quelli positivi; invece le approssimate mobilità medie soltanto per il primo tratto risultano più alte. Tale comportamento è dovuto evidentemente all'influenza dell'alto tenore di ioni a più elevata mobilità. Ho limitato le conclusioni deducibili dalle osservazioni a pure constatazioni, riservandomi di dare una esauriente interpretazione dei risultati allorchè avrò raccolto una maggiore messe di osservazioni.

In conclusione risulta peraltro evidente la concordanza dei valori delle mobilità coi valori già precedentemente ottenuti, nonchè la relazione tra mobilità e condizioni meteorologiche. Rimane ancora dimostrato la possibilità di avere pei gruppi di piccoli ioni mediante l'apparecchio Ebert-Mache le mobilità corrispondenti ai singoli gruppi, le mobilità medie e quelle medie approssimate, seguendo metodi che non s'accordano pienamente con quelli generalmente adottati, anche per la misura dell'ultimo valore, l'unico determinato mediante il metodo consigliato.

Un'equazione analoga a quella di Clairaut dedotta della geometria di Lobaceschi

Nota della dott. **Maria Di Bello**, *presentata dal socio corrisp.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 9 dicembre 1939 - XVIII).

Sunto. — L' equazione di Clairaut sorge dal considerare l' equazione differenziale di un sistema di rette di cui l' inviluppo è la soluzione singolare. Una proprietà analoga, ed un'analoga equazione, con analogo procedimento di integrazione sorgono considerando la rappresentazione conforme di rette Lobaceschiane.

Le rette Lobaceschiane sono rappresentate in rappresentazione conforme dai cerchi col centro sull' asse ox (cerchi k), quindi una curva piana Γ rappresentante una curva Lobaceschiana C inviluppata dalle sue tangenti Lobaceschiane si presenta come inviluppo di questi cerchi k.

Sia dunque la curva Γ immagine di una curva Lobaceschiana ed abbia l'equazione $F(x, y) = 0$ e sia P un suo punto. L'immagine della tangente Lobaceschiana è il cerchio k_t per P ed ivi tangente a Γ, mentre l'immagine della normale Lobaceschiana è il cerchio k_n passante per P ed ivi ortogonale al k_t e tangente alla normale Euclidea.

Sia al solito $P(x, y)$ il punto della curva, T l'intersezione della tangente per P a Γ con l'asse x, θ l'angolo PTN; sia N il piede della normale euclidea, Q il piede della perpendicolare per P sull'asse x, quindi $QPN = \vartheta$.

$$\text{Ora,} \quad PN = \frac{PQ}{\cos\vartheta} = \sqrt{1 + y'^2} \quad ; \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{QN}{PQ} \quad , \quad y \operatorname{tg}\vartheta = yy'$$

perciò l'ascissa del centro del cerchio Lobaceschiano è $x + yy'$.

L'equazione del cerchio immagine della tangente Lobaceschiana è

$$[X - (x + yy')]^2 + Y^2 = y^2(1 + y'^2).$$

Il raggio del cerchio immagine della normale Lobaceschiana è la tangente Euclidea PT, il suo centro è il punto T di coordinate OT e zero;

$$PT = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} \quad ; \quad \operatorname{cotg}\vartheta = \frac{TQ}{PQ} \quad ; \quad y \operatorname{cotg}\vartheta = \frac{y}{y'},$$

l'ascissa del centro è $x - \dfrac{y}{y'}$, quindi l'equazione del cerchio immagine

della normale Lobaceschiana è

$$\left[X - \left(x - \frac{y}{y'}\right)\right]^2 + Y^2 = \frac{y^2}{y'^2}(1 + y'^2)$$

Si ha un flesso se la tangente ha tre punti comuni con la curva, cioè in rappresentazione conforme il cerchio osculatore deve essere un cerchio k; ciò avviene ogni qualvolta l'evolvente incontra l'asse x.

Ogni curva piana considerata come inviluppo di cerchi k, rappresenta conformemente una curva Lobaceschiana inviluppata dalle sue tangenti Lobaceschiane; quindi si verifica (ed era logico attenderlo) che la Γ è l'integrale singolare di una equazione differenziale di cui gli integrali ordinari sono i cerchi k. *Questa equazione risulta del tutto analoga, anche nel procedimento per integrarla, a quella di* CLAIRAUT.

La curva é inviluppo di rette Lobaceschiane, cioé di cerchi k; il sistema di questi è

$$(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2(\alpha) \tag{1}$$

Derivando totalmente rispetto ad x abbiamo

$$(x - \alpha) + yy' = 0$$

cioè

$$\alpha = x + yy'$$

quindi l'equazione differenziale di quel sistema di cerchi diventa

$$(yy')^2 + y^2 = r^2(x + yy') \tag{2}$$

che è l'equazione, analoga a quella di CLAIRAUT, di cui ci interessiamo.

Per mostrare che essa si integra analogamente a quella, procediamo come segue.

La (2) derivata da:

$$2(yy')(yy')' + 2yy' = 2r(x + yy') \cdot r'(x + yy')[1 + yy')']$$

cioè

$$[1 + (yy')'] \{ yy' - r(x + yy') \cdot r'(x + yy') \} = 0$$

Questa equazione porta come soluzione o quella di

$$1 + (yy')' = 0 \tag{I}$$

oppure quella di

$$yy' - r(x + yy')\, r'(x + yy') = 0 \tag{II}$$

La I integrata dà l'equazione di un cerchio contenente un parametro arbitrario; infatti

$$(yy')' = -1.$$
$$yy' = -(x-c)$$

cioè

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + cx - d,$$
$$y^2 + x^2 - 2cx + 2d = 0 \quad ;$$

c e d sono legati fra loro dovendo soddisfare questi cerchi alla (2), e quindi si ha

$$2d = c^2 - r^2(c) \qquad (c = \alpha)$$

La II dà l'integrale singolare, cioè la curva inviluppo di quei cerchi; infatti

$$yy' = r(x + yy')\, r'(x + yy') .$$

Poniamo

$$\begin{aligned} x + yy' &= t \\ (3) \qquad yy' &= t - x \\ t - x &= r(t)\, r'(t) \\ x &= t - r(t)\, r'(t). \end{aligned}$$

Riscriviamo la (3)

$$ydy = (t-x)\,dx = r(t)\,r'(t)\,dx.$$

Intanto

$$dx = dt - \{ r(t)\, r'(t) \}'\, dt$$

sostituendo

$$\begin{aligned} ydy &= r(t)\,r'(t)\{dt - [r(t)\,r'(t)]'\,dt\} = \\ &= r(t)\,r'(t)\,dt - r(t)\,r'(t)\,[r(t)\,r'(t)]'\,dt \end{aligned}$$

Integriamo dopo di aver posto

$$r(t)\,r'(t) = s(t)$$
$$[r(t)\,r'(t)]' = s'(t).$$

sicchè:

$$\frac{1}{2}y^2 = \int s(t)\,[1 - s'(t)]\,dt$$
$$y^2 = 2\int s(t)\,[1 - s'(t)]\,dt$$

da cui

$$y = \sqrt{2 \int s(t) [1 - s'(t)] dt}.$$

Le equazioni parametriche dell' inviluppo sono:

$$\begin{cases} x = t - s(t) \\ y = \sqrt{2 \int s(t) [1 - s'(t)] dt} \end{cases}$$

Mostriamo ora come mediante queste operazioni si ritorna all' inviluppo della (1), cioè

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + y^2 = r^2(\alpha) \\ -(x - \alpha) = r(\alpha) r'(\alpha). \end{cases}$$

Infatti, poniamo $t = \alpha$, allora

$$\begin{cases} x = \alpha - s(\alpha) \\ y = \sqrt{2 \int s(\alpha) [1 - s'(\alpha)] d\alpha}. \end{cases}$$

Nella prima equazione, sostituendo i valori di x ed y, vediamo che è identicamente soddisfatta, essendo

$$s^2(\alpha) + 2 \int s(\alpha) [1 - s'(\alpha)] d\alpha = 2 \int s(\alpha) d\alpha.$$

Analogamente verifichiamo per la seconda:

$$s(\alpha) = r(\alpha) r'(\alpha) = s(\alpha);$$

c. b. d.

Sulla teoria delle sostituzioni generalizzate e dei loro gruppi generalizzati

Nota del Socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 9 dicembre 1939 - XVIII)

Sunto. — Si esaminano certi enti che nascono dalla considerazione degli ordinari gruppi di sostituzioni, allorchè alcuni degli elementi sui quali questi operano, si suppongono venire a coincidere.

1. È possibile in vari modi porre la quistione di generalizzare il concetto di sostituzione, e quello di gruppo ad esso relativo.

Anzitutto si può operare su un numero infinito di elementi; ed un primo sviluppo — forse l' unico — in tale senso è stato da noi svolto, assieme alle sue prime applicazioni, da parecchio tempo [1]).

Però non è questo il solo modo; si può, in analogia a quanto ha fatto lo Spampinato [2]), porre il vincolo che il prodotto di due operazioni del complesso non debba necessariamente far parte del complesso stesso, ma sibbene il prodotto di tre (o se si vuole, di n) vi appartenga: come affiora facilmente, ad esempio, considerando le sostituzioni che operano il passaggio da permutazioni di una certa parità ad una di parità diversa.

Si può anche (ed è questo lo schema di base della nostra trattazione) lasciar cadere l'ipotesi che si tratti di passaggio da una permutazione (semplice) ad un'altra (semplice) per considerare invece il passaggio da una permutazione con ripetizione ad un'altra con ripetizione, operando così in analogia alle funzioni polidrome. E questa estensione, come ora vedremo, trae la sua naturale ed immediata origine dai gruppi di Galois allorchè coincidono alcune delle radici dell' equazione. È agevole, del resto, ritrovare già nella abituale teoria dei gruppi un'altra analogia: quella dell'isomorfismo meriedrico di un gruppo in sè stesso.

A sua volta quest'ampliamento della teoria delle sostituzioni conduce infine a quello di considerare il passaggio da una disposizione con ripetizione ad un' altra dello stesso tipo. Si presentano allora — nella disposizione iniziale — elementi cui *non* corrisponde nulla, e che quindi si « perdono » fatto già delineato precisamente nelle sostituzioni su infiniti elementi (ved. loc. cit.), ma si presentano anche nella disposizione fi-

---

[1]) Andreoli G., *Sui gruppi di sostituzioni che operano su infiniti elementi.* Rend. Circ. Mat. Palermo. Tomo XL, 1915$_2$.

nale — elementi che *non* sono i corrispondenti di nessuno e che quindi « nascono ».

In generale, se si considera un'insieme di elementi, si vengono così a definire le più generali corrispondenze dell'insieme con se stesso; cioè generalmente si potrà parlare di funzione in questo insieme.

In particolare, questo insieme può essere un corpo numerico; oppure uno spazio le cui coordinate appartengono ad un corpo numerico, ed allora si spiega chiaramente che ogni corrispondenza biunivoca o no, senza eccezioni o con eccezioni di quello spazio con se stesso (o con un suo sotto spazio) possa interpretare quanto diciamo ora.

Con tali ultime estensioni anche la teoria delle sostituzioni su infiniti elementi acquista un assetto più completo; invece di considerare le « *catene* » (v. loc. cit.) come sostituzioni prive di inversa (per il fatto che si ha

$$a \rightarrow b, \; b \rightarrow c,$$

sicchè nella sostituzione, a non proviene da nessun altro elemento) esse si considerano come sostituzioni per le quali l'inversa « crea » un elemento:

$$\ldots . \; d \rightarrow c, \; c \rightarrow b, \; b \rightarrow a,$$

a essendo il nuovo elemento che non figurava fra quelli iniziali.

Dovremo, dunque, in un secondo momento, riprendere la teoria delle sostituzioni su infiniti elementi con tali ultime estensioni; e, ad esempio, nello studio della polidromia delle funzioni ad infiniti valori, ciò condurrà ad una impostazione più ampia e più completa degli scambi fra i rami, potendosi presentare rami che sono « lacunari » perchè esistono solo in certe regioni del piano e non in altre.

Come abbiamo già detto, è bene osservare che questo concetto più generale di sostituzione nasce appunto dal considerare le più generali corrispondenze in un complesso finito di elementi, cioè le « funzioni » in un corpo finito.

Tali funzioni possono essere monodrome nel corpo ed univalenti — e si ha l'ordinario concetto di sostituzione; i gruppi di queste nascono dal considerare funzioni di funzioni, formanti proprio gruppi.

Se le funzioni *non* sono monodrome o *non* sono univalentî nascono precisamente questi altri tipi di sostituzioni.

D'altro canto, per ora noi non abbordiamo la generalità completa di queste estensioni; ma sibbene ci limitiamo a certe formazioni le quali estendono le ordinarie sostituzioni ma in modo che richiama fatti aritmetici quali le congruenze e gli ideali.

2. Per seguire chiaramente quello che avviene in uno dei casi più semplici di questi punti di vista, consideriamo l'equazione cubica e le tre radici α, β, γ, distinte. Il gruppo è quello totale su tre elementi:

$$G_3 \equiv I \,,\, S \,,\, \Sigma \,,\, T \,,\, U \,,\, V$$

dove S è la sostituzione ciclica sui tre elementi, Σ il suo quadrato, e T, U, V, le trasposizioni.

Il sottogruppo alterno di G_3, Γ_3 è

$$\Gamma_3 \equiv I \,,\, S \,,\, S^2.$$

Che cosa avviene, *materialmente*, nell'equazione e nel gruppo se $\alpha = \beta$ (meglio, se consideriamo α indiscernibile da β)? Seguiremo dopo che cosa avviene in effetti

L'equazione diventa riducibile; ma il gruppo G_3, viene ad essere ora il complesso:

$$K_3^* \equiv I^* \,,\, S^* \,,\, \Sigma^* \,,\, T^* \,,\, U^* \,,\, V^*$$

dove:

$$I^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad S^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \gamma & \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad \Sigma^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \gamma & \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$T^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad V^* = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \gamma & \alpha & \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad V^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma \\ \alpha & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Si presenta qui il fatto che — considerando *solo* i due elementi distinti α, γ, si può passare da uno di essi ad un altro, oppure ad ambedue; e reciprocamente uno di essi può essere ottenuto da uno o da ambedue [1].

Si vede subito che $I^* \equiv T^*$; $U^* \equiv V^* \equiv S^* \equiv \Sigma^*$; $(I^*)^{-1} \equiv I$; $(S^*)^{-1} \equiv S$. Si potrebbe adottare la notazione più espressiva

$$I^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & \gamma \\ \downarrow & & \downarrow \\ \gamma & & \alpha \end{pmatrix} \quad ; \quad S^* \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & \gamma \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ \gamma & & \alpha \end{pmatrix};$$

Se vogliamo fare il quadrato di queste due operazioni, troveremo:

$$(I^*)^2 \equiv I^* \quad ; \quad (S^*)^2 = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma & \gamma \\ \alpha & \gamma & \alpha & \gamma \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & & \gamma \\ \downarrow & \swarrow \times \searrow & \downarrow \\ \gamma & & \alpha \end{pmatrix} \equiv \Theta.$$

---

[1]) In prima linea segneremo gli elementi dai quali si parte, in seconda quelli cui si arriva.

Sicchè, mentre S^* muta γ in α soltanto, $(S^*)^2 \equiv \Theta$, muta α sia in α che in γ; e γ sia in α che in γ.

Dunque resta in definitiva che quell' identificazione di α con β ha mutato il gruppo G_3 in un complesso K_3, che dà origine ad un gruppo generalizzato G^*_3 costituito dalle sostituzioni generalizzate:

I^* che è ancora l'identità;

S^* che muta α o in α stesso o in γ, e γ solo in α

Θ che muta α sia in α che in γ, e così pure γ.

Si vede subito che

$$I^* \neq \Theta \quad ; \quad \Theta \equiv (\Theta)^2 \equiv (\Theta)^3 \ldots ;$$

e mentre

$$I^* \Theta \equiv \Theta I^* \equiv \Theta \quad ; \quad S^* \Theta \equiv \Theta S^* \equiv \Theta$$

e si ripresenta quindi un fatto già noto nella teoria delle algebre.

Sicchè la tabella di moltiplicazione di questo gruppo generalizzato G^* è

	I^*	S^*	Θ
I^*	I^*	S^*	Θ
S^*	S^*	Θ	Θ
Θ	Θ	Θ	Θ

In base alle definizioni date, dovevamo attenderci che questa tabella *non* goda più delle proprietà di quella relativa ad un gruppo ordinario.

In questo caso ordinario una stessa operazione non può ripetersi nè in linea, nè in colonna; essendo questa una condizione *necessaria*.

Invece, con l' estensione assegnata viene a cadere il vincolo detto, come effettivamente mostra quest'ultima tabella.

3. Da questa tabella di moltiplicazione, con il ben noto procedimento segue che G^*_3 è a sua volta isomorfo a quello delle sostituzioni (generalizzate) sui tre elementi I_i^*, S^*, Θ.

E precisamente, I^* ed S^* corrispondono a due sostituzioni dello stesso tipo; avendosi:

$$\overline{I} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{S} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \gamma \end{pmatrix} \quad , \quad \overline{\Theta} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

con il quadro di moltiplicazione:

	$\overline{I}$	$\overline{S}$	$\overline{\Theta}$
$\overline{I}$	$\overline{I}$	$\overline{S}$	$\overline{\Theta}$
$\overline{\rho}$	$\overline{S}$	$\overline{S}$	$\overline{\Theta}$
$\overline{\Theta}$	$\overline{\Theta}$	$\overline{\Theta}$	Θ

che è lo stesso di quello di I^*, S^*, Θ^*.

Intanto si presenta un fatto notevole: noi siamo partiti dalle sostituzioni I^*, S^*, Θ^* presentanti solo elementi ripetuti (cioè col passaggio da una permutazione con ripetizione ad un altra) e giungiamo, attraverso l'isomorfismo creato dalla tabella di moltiplicazione, a sostituzioni generalizzate operanti non più sulle permutazioni ma sulle disposizioni; che dànno perciò elementi che «*nascono*» ed elementi che «*muoiono*».

Infatti, dall'operazione consistente nel moltiplicare a sinistra per I^* corrispone la sostituzione

$$\overline{I} \equiv \begin{pmatrix} I^* & S^* & \Theta^* \\ I^* & S^* & \Theta \end{pmatrix}$$

e così al moltiplicare a sinistra per S^* e per Θ^* corrispondono le permutazioni

$$\overline{S} \equiv \begin{pmatrix} I^* & S^* & \Theta^* \\ I^* & \Theta^* & \Theta^* \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{\Theta} \equiv \begin{pmatrix} I^* & S^* & \Theta^* \\ \Theta^* & \Theta^* & \Theta^* \end{pmatrix}$$

che sono del tipo detto, in quanto la prima fa perdere I^*, la seconda fa perdere I^*, S^*.

E poi agevole vedere che se si considerano le inverse di queste cioè

$$\underline{I} = \overline{I}^{-1} \quad , \quad \underline{S} = \overline{S}^{-1} \quad , \quad \underline{\Theta} = \overline{\Theta}^{-1}$$

ovvero

$$\underline{S'} \equiv \begin{pmatrix} \rho^* & \Theta^* & \Theta^* \\ I^* & S^* & \Theta^* \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\Theta} \equiv \begin{pmatrix} \Theta^* & \Theta^* & \Theta^* \\ I^* & S^* & \Theta^* \end{pmatrix}$$

invece di elementi che si perdono si hanno elementi che compaiono; in ogni caso però la tabella di moltiplicazione dei gruppi generalizzati

$$I^* , S^* , \Theta^* \quad ; \quad \overline{I} , \overline{S} , \overline{\Theta} \quad ; \quad \underline{I} , \underline{S} , \underline{\Theta} \, .$$

è la stessa (salvo il nome) ed i tre gruppi sono in isomorfismo oloedrico.

Si delinea dunque la presenza simultanea delle due generalizzazioni indicate.

È bene notare sin dall'inizio che le sostituzioni operanti su disposizioni, per le quali si « perdono » o si « acquistano » elementi nuovi si possono subito ricondurre a quelle già viste ora. Basta introdurre un elemento N (o più di questi) dal quale traggono origine o nel quale si mutano gli elementi acquisiti o perduti.

Così ad esempio la sostituzione

$$S \equiv \begin{pmatrix} a & b & c & e \\ a & c & d & e \end{pmatrix}$$

nella quale si « perde » b e si « acquista » d, può essere segnata come

$$S^* \equiv \begin{pmatrix} a & N & b & c & d & e & N \\ a & b & c & d & N & e & N \end{pmatrix}$$

che è del primo tipo considerato. Moltiplicando due sostituzioni ad elementi « perduti » o « acquisiti », sia sotto la forma immediata che sotto la forma ora detta, si trae sempre che da

$$S \cdot T = U$$

segue anche

$$S^* T^* = U^*$$

cioè vi è isomorfismo fra le due definizioni.

4. Ma si può ancora passare oltre e collegarsi direttamente ai gruppi che operano su infiniti elementi. Infatti, nelle sostituzioni ordinarie e nei loro gruppi si presenta il passaggio da una permutazione ad un altra; è chiaro che subordina anche il passaggio da una permutazione di una coppia di elementi ad un altra; da una delle terne ad un altra delle terne, etc., restando intransitivo il sistema. Cioè gli elementi si mutano solo in elementi, le coppie solo in coppie, le terne solo in terne etc.

Se dunque si considerano simultaneamente tutti i simboli formati dagli elementi, dalle coppie di elementi, dalle terne, dalle coppie formate da coppie e da elementi etc, si ha che ad ogni sostituzione

$$S^* \equiv \begin{pmatrix} a & b & c & \dots & n \\ a' & b' & c' & \dots & n' \end{pmatrix}$$

ne è collegata una

$$S_{(2)} \equiv \begin{pmatrix} (a\,b) & (a\,c) \ldots \\ (a'b') & (a'c') \ldots \end{pmatrix}$$

una

$$S_{(3)} \equiv \begin{pmatrix} (a\,b\,c) & (a\,b\,d) \ldots \\ (a'b'c') & (a'b'd') \ldots \end{pmatrix} \quad ; \quad S_{1,2} \equiv \begin{pmatrix} (a,(a\,b)) \,, & \{a,(a\;c)\} \\ (a',(a'b')) \,, & (a',(a',c')) \end{pmatrix}$$

e così via; e più generalmente una

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} a & b & c & \ldots & n & (a\,b) \ldots (a\,b\,c) \ldots \\ a' & b' & c' & \ldots & n' & (a'b') \ldots (a'b'c') \ldots \end{pmatrix}$$

operante su infiniti elementi, in modo intransitivo.

Per lo stesso motivo, al gruppo G e delle S sono collegati con isomorfismi oloedrici, i gruppi $G_{(2)}$, $G_{(3)}$, ... delle $S_{(2)}$, $S_{(3)}$, ... ed il gruppo Γ delle Σ.

Orbene, nell'estensione che noi diamo come prima, cade la condizione di spezzamento delle Σ in sistemi intransitivi perchè si ha la possibilità — come abbiamo visto per le sostituzioni di G (su tre elementi) — che ad un elemento corrisponda una coppia etc. etc.

Infatti, con tale procedimento si vede che la sostituzione S^* ad esempio opera come

$$\begin{pmatrix} \alpha & \gamma & (\alpha,\gamma) \ldots \\ (\alpha,\gamma) & \alpha & \alpha \ldots \end{pmatrix}$$

5. È tuttavia possibile ricondurre quelle generalizzazioni che nascono dal considerare le equazioni algebriche a radici multiple ad un solo tipo; esso deriva da una specie di calcolo analogo a quello delle congruenze fra numeri. Infatti, fissiamo ancora la nostra attenzione sul gruppo totale su tre elementi

$$I \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

$$S \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix} \,, \quad \Sigma \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

$$T \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \gamma & \beta \end{pmatrix} \,, \quad U \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix} \,, \quad V \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

Dire che in esso poniamo α indiscernibile da β equivale a considerare come identiche tutte le sostituzioni ottenute da una data permutando fra loro α e β nel numeratore, o nel denominatore, o in ambedue.

In altri termini, se Z è una qualunque sostituzione, apparterranno alla stessa classe (cioè si devono considerare ad essa equivalenti) le sostituzioni

$$Z \;, \quad VZ \;, \quad ZV \;, \quad VZV \;,$$

V essendo la trasposizione $(\alpha\beta)$.

Pertanto I^* rappresenta tutta la classe (cioè il complesso)

$$I \;, \quad V \;;$$

S^* invece rappresenta tutta la classe

$$S \;, \quad VS = T = SV = U \;; \quad SVS = \Sigma \;;$$

dunque $S^* . S^* = (S^*)^2$ rappresenterà tutto il complesso ottenuto dal prodotto dei due, cioè

$$(S \,, T \,, U \,, \Sigma) \times (S \,, T \,, U \,, \Sigma)$$

ovvero ancora

$$S^2 \,, TS \,, ST \,, T^2 \,, SV \,, US \,, TV \,, VT \,,$$

che è precisamente tutto il gruppo

$$(I \,, S \,, \Sigma \,, T \,, U \,, V)$$

indicato con Θ^*.

In modo analogo si vede che $I^* \; S^* = S^* I^* = S^*$; $\Theta^* \, S^* = S^* \, \Theta^* \equiv \Theta^*$; $(\Theta^*)^2 = \Theta^*$. Per tale via, le estensioni da noi indicate in principio si riconducono ad un calcolo sui complessi di sostituzioni; si formano certi complessi, questi si moltiplicano fra di loro, ottenendone dei nuovi etc.

In tal guisa si ottiene un'altra interpretazione di questi enti.

6. Nei gruppi così completati resta valida *soltanto* la proprietà associativa. Viene a cadere (oltre che quella di formare un insieme finito) l'altra condizione per la quale da

$$AB = AC \quad \text{oppure} \quad BA = CA$$

si deduce

$$B = C \,.$$

Il concetto di operazione S^{-1} inversa di un'altra S resta soltanto come passaggio in senso inverso, decadendo l'altra proprietà che

$$S^{-1} \, . \, S = I \, ,$$

in quanto $S^{-1} . S$ è un operazione per la quale ad un elemento generico α (che non si perda) corrisponde, fra gli altri, *sempre*, α stesso ma non solamente esso; e naturalmente, non è più in generale vero che:

$$S^{-1} S = S S^{-1} \; ;$$

Infatti, ad esempio, mentre

$$\Theta \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma & \gamma \\ \alpha & \gamma & \alpha & \gamma \end{pmatrix} \quad ; \quad [\Theta]^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \gamma & \gamma \\ \alpha & \gamma & \alpha & \gamma \end{pmatrix}$$

sicchè

$$\Theta^* [\Theta^*]^{-1} = [\Theta^*]^{-1} . [\Theta^*] = \Theta^* ,$$

è

$$\overline{\Theta} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \gamma & \gamma \end{pmatrix} \; ; \; \Theta^{-1} \equiv \underline{\Theta} \equiv \begin{pmatrix} \gamma & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

sicchè

$$\overline{\Theta} . \underline{\Theta} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \beta & \beta & \gamma & \gamma & \gamma \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

mentre

$$\underline{\Theta} \; \overline{\Theta} \equiv \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \end{pmatrix}$$

perdendosi gli elementi α, β; sicchè a sua volta

$$\left(\overline{\Theta} \; \underline{\Theta}\right)^2 = \overline{\Theta} \; \underline{\Theta} \quad ; \quad \left(\underline{\Theta} \; \overline{\Theta}\right)^2 = \underline{\Theta} \; \overline{\Theta} \; ;$$

$$\left(\overline{\Theta} \; \underline{\Theta}\right)\left(\underline{\Theta} \; \overline{\Theta}\right) = \underline{\Theta} \; \overline{\Theta} = \left(\underline{\Theta} \; \overline{\Theta}\right)\left(\overline{\Theta} \; \underline{\Theta}\right)$$

E così anche

$$\underline{\Theta} \; \overline{\Theta} \; \underline{\Theta} = \Theta = \overline{\Theta} \; \underline{\Theta} \; \overline{\Theta} \, .$$

La presenza di un *solo* fattore Θ riconduce il prodotto a Θ stesso: qualche cosa di analogo avviene per certi gruppi di operazioni topologiche.

7. Sotto quest' ultimo aspetto, la teoria sistematica di queste generalizzazioni si presenta in modo unico e di massimo ampliamento ed indipendente dal concetto di sostituzione *).

Sia G un gruppo, Γ un suo sottogruppo, S una qualsiasi operazione di G, Σ_r $(r = 1 \ldots v)$ le operazioni di Γ.

Indicheremo con S^* il complesso costituito dalle operazioni:

$$S^* \equiv \{ ; \ldots \Sigma_i S \ldots ; \ldots S\Sigma_j \ldots ; \ldots \Sigma_i S \Sigma_j \ldots \} \qquad i, j = 1, \ldots v,$$

e lo diremo « *operazione ampliata* ».

È chiaro che il gruppo G si presenta come un assieme di tali complessi $G \equiv S^*, T^*, U^* \ldots$; e siccome dovremo porre

$$S^* T^* \equiv \{ S ; \ldots \Sigma_i S \ldots ; \ldots S\Sigma_j \ldots ; \ldots \Sigma_i S \Sigma_j \ldots \} \cdot \{ T ; \ldots \Sigma_r T \ldots ; \ldots T\Sigma_s \ldots ; \ldots \Sigma_r T \Sigma_j \}$$

cioè

$$S^* T^* \equiv \{ ST \; ; \; \Sigma_i ST \; ; \; S\Sigma_j T \; , \; \Sigma_i S \Sigma_j \; ; \; \Sigma_i S \Sigma_r T \; ; \; \Sigma_i ST\Sigma_r \; , \; \Sigma_i S \Sigma_j \Sigma_r T , \ldots \}$$

accade che in generale $S^* T^*$ forma un complesso di tipo più generale di quello di S^*, T^*.

Dunque, le operazioni ampliate $S^*, T^*, \ldots$ sono generatrici di un gruppo ampliato G^*, i cui elementi sono costituiti da complessi via via più ampliati e di cui quello generatore contiene le operazioni ampliate

$$S'^* \equiv \{ \Sigma_i S \Sigma_j \} \; ;$$

quello di secondo ampliamento contiene queste e le operazioni ampliate

$$S^* T^* \equiv \{ \Sigma_i S \Sigma_j T \Sigma_k \}$$

quello di terzo, i complessi

$$S^* T^* U^* \equiv \{ \Sigma_i S \Sigma_j T \Sigma_k U \Sigma_r \}$$

e così via, sino a giungere ad un complesso

$$\Theta \equiv G$$

cioè costituito dal gruppo stesso che si riproduce per moltiplicazione per qualsiasi altro.

---

*) E se ne deve notare l' analogia con il concetto di ideale algebrico e con la teoria aritmetica delle congruenze.

Se in particolare G fosse stato abeliano, allora questi successivi ampliamenti non si presentano; ed infatti allora avremo semplicemente:

$$S^* \equiv \{ \Sigma_i S \}$$
$$T^* \equiv \{ \Sigma_j T \}$$
$$S^* T^* \equiv \{ \Sigma_k \cdot S \cdot T \} ;$$

In tal caso fra il gruppo G, ed il gruppo G^* sussiste un isomorfismo meriedrico. Il concetto introdotto va dunque considerato anche come un ampliamento di quello di isomorfismo.

Ad esempio sia

$$G \equiv I \, , \, S \, , \, S^2 \, , \, S^3 \, , \, S^4 \, , \, S^5 \, ;$$

mentre

$$\Gamma \equiv I \, , \, S^2 \, , \, S^4 \, .$$

Allora

$$S^* \equiv \{ S \, , \, S^3 \, , \, S^5 \}$$
$$T^* \equiv \{ I \, , \, S^2 \, , \, S^4 \}$$

Sicchè il gruppo ampliato G^* è composto da S^*, ed T^* con la tabella di moltiplicazione

$$(S^*)^2 = T^* \quad ; \quad S^* T^* = S^* \quad ; \quad (T^*)^2 = T^*$$

cioè

	S^*	T^*
S^*	T^*	S^*
T^*	S^*	T^*

E questo mostra anche il riconnettersi della già citata teoria dei semigruppi dello Spampinato alla nostra.

In modo analogo, se G fosse ancora lo stesso e Γ invece fosse

$$I \, , \, S^3$$

avremmo come gruppo ampliato G^*. quello costituito da

$$S^* \equiv \{ S \, , \, S^4 \}$$
$$T^* \equiv \{ S^2 , \, S^5 \}$$
$$U^* \equiv \{ I \, , \, S^3 \} \, ,$$

e la tabella di moltiplicazione diventa

	S^*	T^*	U^*
S^*	T^*	U^*	S^*
T^*	U^*	S^*	T^*
U^*	S^*	T^*	U^*

In generale:

Se il gruppo G è abeliano, il gruppo G^* è anche esso un gruppo (anche nel senso ordinario della parola) ed abeliano anch'esso.

Avviene sempre un fatto analogo se pur senza essere G abeliano, lo sia Γ e per di più le operazioni di Γ sieno permutabili su tutte quelle di G.

In tal caso G^* è costituito da S^*, T^*,... senza ulteriori ampliamenti.

Anche se Γ è permutabile con G (sotto gruppo centrale) si può ragionare analogamente.

Qui risulta chiara l'analogia con la teoria della congruenza.

Se scegliamo ancora come gruppo G quello totale su 4 elementi, e come sotto gruppo Γ quello dato da

$$\Sigma_1 \equiv (\alpha\beta) \quad , \quad \Sigma_2 \equiv (\gamma\delta) \quad , \quad \Sigma_3 \equiv (\alpha\beta)(\gamma\delta) = \Sigma_1\Sigma_2 = \Sigma_2\Sigma_1$$

si avranno le operazioni ampliate

$$I^* \equiv \{ I \ , \Sigma_1 \ , \Sigma_2 \ , \Sigma_3 \}$$
$$C^* \equiv \{ C \ , \Sigma_1 C \ , \Sigma_2 C \ , \Sigma_3 C \ , C\Sigma_1 \ , C\Sigma_2 \ , C\Sigma_3 \ , \Sigma_1 C \Sigma_1 \dots \}$$
$$C \equiv (\alpha\beta\gamma\delta)$$
$$T^* \equiv \{ T \ , \Sigma_1 T \}$$

Per dare invece esempio di un altro gruppo ampliato, consideriamo quello totale su quattro elementi, allorchè si pongono indiscernibili fra loro due di questi, ad esempio α e β.

Sia Σ la trasposizione (α, β), il sotto gruppo Γ è costituito proprio da I, Σ

Quindi i complessi che formano le operazioni ampliate, sono ovviamente

$$I^* \equiv \{ I \ , \Sigma \}$$
$$H^* \equiv \{ T \ , T\Sigma \} \qquad T \equiv (\gamma\delta)$$
$$C_1^* \equiv \{ C_1 \ , \Sigma C_1 \ , C_1\Sigma \ , \Sigma C_1 \Sigma \} \ , \ C_1 \equiv (\beta\gamma\delta)$$

Conclusioni :

Le corrispondenze univalenti e monodrome di un insieme finito di elementi con se stesso, sono le ordinarie sostituzioni; quelle di un insieme non finito le sostituzioni su infiniti elementi; e sono il passaggio da una permutazione ad un altra.

Lasciando cadere la condizione di univalenza si hanno le disposizioni al posto delle permutazioni, lasciando cadere la condizione di monodromia si hanno quelle con ripetizione.

I gruppi relativi a questi ampliamenti sono collegati fra loro; però conservano la sola proprietà fondamentale, oioè quella della proprietà associativa del prodotto.

Si modificano i concetti di periodicità, ordine etc.

Fra queste corrispondenze generalizzate, vi sono — come classe a parte — quelle che nascono dal supporre certi elementi delle sostituzioni ordinarie « indiscernibilî » fra loro; e la forma più completa di tale estensione si ottiene considerando i complessi di quelle sostituzioni di un gruppo, che sieno « multiple » (a destra, a sinistra, e da ambedue le parti) di una prescelta, secondo un certo sotto gruppo prefissato.

In caso particolare (di gruppi abeliani) ciò corrisponde a considerare un automorfismo meriedrico del gruppo.

Nel caso generale invece si presentano le diverse estensioni indicate sopra, e si presentano tutte simultaneamente.

SULL'ANALISI STATISTICA DI FATTI ECONOMICI ED IN GENERALE DI FENOMENI DI SCAMBIO

Nota del socio corrispondente **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 9 dicembre 1939 - XVIII)

Sunto. — Si sviluppa una certa ricerca metodologica e la sua applicazione ad un fenomeno economico, indicando la origine di questa ricerca e le possibilità di sviluppi.

1. Una mia recentissima comunicazione [1], alla I Riunione della Società Italiana di Statistica, tratta di una quistione metodologica connessa allo studio della crisi economica, studio fatto partendo dalla variabilità di un gruppo di prezzi [2].

Riprendiamo quì la stessa quistione ampliandone la portata e delineandone meglio il metodo di esame.

Nelle considerazioni che svolgeremo vengono a confluire le ricerche in materia di economia svolte in questi ultimi tempi dal prof. G. PALOMBA (cfr. questi Rendiconti e gli Annali del R. Ist. Sup. Navale), quelle di carattere statistico del prof. G. DE MEO, e le precedente mie, oltre certe ricerche del GALLUCCI.

L'impostazione del problema posto nella comunicazione citata, è sostanzialmente quella che segue. Il metodo, ben si intende è applicabile oltre che a fenomeni economici a qualsiasi fenomeno di scambio e di ricambio.

2. In un certo istante, sul mercato, ridotto convenzionalmente alla moneta M e ad un certo gruppo di merci $P_1, P_2, \dots P_n$, vigono rispettivamente i prezzi (delle unità di quelle merci, in unità di moneta):

$$\begin{cases} \text{merci} & : \quad M \;,\; P_1 \;,\; P_2 \;,\dots,\; P_n \\ \text{prezzi} & : \quad 1 \;,\; p_1 \;,\; p_2 \;,\dots,\; p_n \;; \end{cases}$$

e vi sono quindi le ragioni di scambio (cioè il costo della unità della merce $M, P_1, \dots P_n$ rispetto alla unità di merce P_r) date da

---

[1]) ANDREOLI G., *Gruppi di prezzi, loro variabilità, indici relativi.*

[2]) Cfr. DE MEO G., *Una analisi sulla variabilità di gruppi di prezzi.* Napoli. « La Nuovissima », 1939.

$$\begin{cases} \text{merci} & : M \quad , P_1 \quad , P_2 , \ldots , P_r , \ldots , P_n \\ \text{merce di paragone } P_r : & \dfrac{1}{p_r} \quad , \dfrac{p_1}{p_r} \quad , \dfrac{p_2}{p_r} , \ldots , 1 , \ldots , \dfrac{p_n}{p_r} \; ; \end{cases}$$

In tal modo resta definita la matrice delle ragioni di scambio,

$$P \equiv \begin{Vmatrix} 1 & p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \\ \dfrac{1}{p_1} & 1 & \dfrac{p_2}{p_1} & \dfrac{p_3}{p_1} & \ldots & \dfrac{p_n}{p_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{1}{p_n} & \dfrac{p_1}{p_n} & \dfrac{p_2}{p_n} & \dfrac{p_3}{p_n} & \ldots & 1 \end{Vmatrix} ;$$

essa è costituita ponendo ordinatamente in colonna le quantità delle singole merci che sono equivalenti all' unità di una merce prefissata, ed in linee invece le quantità di un' altra merce anch' essa prefissata che sono equivalenti all' unità delle altre tutte, ordinatamente.

Questa matrice gode della ovvia proprietà che in diagonale principale vi è sempre l' unità, mentre due elementi simmetrici rispetto a questa diagonale sono numeri reciproci : cioe $a_{rs} \cdot a_{sr} = 1$, $a_{rr} = 1$.

Nella comunicazione precitata si considera « *l' invariante* » di questa matrice, che è dato dalla somma di tutti i suoi elementi, e che si riduce al prodotto

$$I_p = (1 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n)\left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}\right).$$

Poiché la somma delle p_r vale n volte la loro media aritmetica m, mentre la somma delle $\dfrac{1}{p_r}$, vale n volte il reciproco della media armonica μ ; quell' invariante I può scriversi

$$I_p = (1 + nm)\left(1 + \frac{n}{\mu}\right).$$

3. Per confrontare, le condizioni di due mercati diversi o dello stesso mercato in due istanti diversi, si possono o confrontare i due diversi invarianti, oppure formare gli indici dei prezzi: si costruirà in tal modo una matrice degli indici, di formazione analoga a quella dei prezzi (la diagonale è unitaria, agli elementi di posto simmetrico hanno valori recidroci); cioè:

$$Y \equiv \left\| \begin{matrix} 1 & i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ \frac{1}{i_1} & 1 & \frac{i_2}{i_1} & \dots & \frac{i_n}{i_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{i_n} & \frac{i_1}{i_n} & \frac{i_2}{i_n} & \dots & 1 \end{matrix} \right\| ,$$

che a sua volta ammetterà l'invariante formato come prima, cioè :

$$I_i = (1 + nj)\left(1 + \frac{n}{\eta}\right),$$

ove j è la media aritmetica, η quella armonica delle i. Il minimo valore di questa invariante è $(n + 1)^2$ (essendo le i positive) raggiunto da $i_1 = = i_r = \dots = 1$; dunque resta definito un indice ω dato da

$$\omega_i = \quad 1 - \frac{(1 + n)^2}{(1 + nj)\left(1 + \frac{n}{\eta}\right)}$$

che è nullo se tutte le i sono unitarie (*nessun cambiamento nei prezzi*), e tende ad uno se qualcuna delle i tende all'infinito.

Orbene, se si formano le medie *tenendo anche conto del prezzo della moneta, che è 1*, si avrà una media aritmetica $\overline{j}$ ed una armonica $\overline{\eta}$ date ovviamente da

$$\frac{1}{n+1}(1 + i_1 + i_2 + \dots + i_n) = \frac{1}{n+1}(1 + nj) = \overline{j}$$

$$\frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{1}{i_1} + \frac{1}{i_r} + \dots + \frac{1}{i_n}\right) = \frac{1}{n+1}\left(1 + \frac{n}{\eta}\right) = \frac{1}{\overline{\eta}} .$$

Risulta semplicemente :

$$I_p = \frac{\overline{m}}{\overline{\mu}} \quad ; \quad I_i = \frac{\overline{j}}{\overline{\eta}} ;$$

e quindi :

$$\omega_i = 1 - \frac{1}{\overline{j} \cdot \frac{1}{\overline{\eta}}} = \frac{\overline{j} - \overline{\eta}}{\overline{j}} ,$$

espressione semplicissima e che mostra come anche questo indice di natura

economica è definito analogamente a quelli di omogamia [1]); ed infatti esso nasce dal confronto della distribuzione esistente con un'altra uniforme.

4. Ma, l'analisi del fatto statistico-economico *non* è esaurito dal confronto dei soli prezzi: ed è questo uno dei punti nuovi sul quale vogliamo richiamare l'attenzione.

Sempre restando ferme quelle merci, si può considerare il loro *mutuo volume di scambio.* Si assuma cioè come unitario il volume di scambio di una certa merce (eventualmente anche la moneta) e si confrontino con esso i *volumi di scambio* delle altre. In altri termini, si considera il numero delle unità (di ogni merce) che è stato soggetto a contrattazione, col numero di unità di una di esse prefissata.

Sieno allora $q_1, q_2, \ldots q_n$ questi rapporti di tali quantità, avremo la tabella:

$$Q \equiv \left\| \begin{matrix} 1 & q_1 & q_2 & \ldots & q_n \\ \frac{1}{q_1} & 1 & \frac{q_2}{q_1} & \ldots & \frac{q_n}{q_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{q_n} & \frac{q_1}{q_n} & \frac{q_2}{q_n} & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|$$

analoga a quella P sia come struttura, che come modo di formazione.

Infine, se si moltiplicano prezzi per quantità si hanno *i valori d scambio*: ed anche quì si può considerare la matrice dei *mutui valori di scambio*, quelli cioè ottenuti confrontando con quello prefissato e relativo ad una certa merce, i singoli valori di scambio; si ha dunque la terza matrice — sempre dello stesso tipo:

$$V \equiv \left\| \begin{matrix} 1 & v_1 & v_2 & \ldots & v_n \\ \frac{1}{v_1} & 1 & \frac{v_2}{v_1} & \ldots & \frac{v^n}{v_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{v_n} & \frac{v_1}{v_n} & \frac{v_2}{v_n} & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|$$

nella quale

$$v_r = q_r p_r .$$

Essa è ottenuta «componendo» le due matrici P e Q.

[1]) Cfr. G. Andreoli. Questi Rendiconti, *passim*.

È chiaro che l'esame simultaneo di questa terna di matrici, fatta in corrispondenza a luoghi diversi (o fatta nel tempo) ci darà il divario complessivo esistente fra più mercati distinti (o la variazione nel tempo di uno prescelto) sotto il triplice aspetto di prezzi, quantità, valori. E resta così affinato il metodo proposto dal DE MEO.

Si scorge chiaramente che il manifestarsi di una crisi può avvenire per tre motivi, i quali possono agire sia isolatamente che congiuntamente.

E precisando, potrà avvenire che cambi la configurazione dei prezzi — (per sopravvenuta abbondanza o carestia in qualche zona); o che cambi la configurazione delle correnti di scambio (per mutati gusti del mercato o per necessità) o che infine, muti il valore di tali correnti.

Perciò, l'analisi dei fenomeni premonitori tracciata dal DE MEO, va estesa anche a queste altre due configurazioni.

Dato il nostro schema, i metodi applicabili ad una di esse sono applicabili anche alle altre due.

5. Date due matrici di mutuo rapporto, cioè due matrici soddisfacenti alla

$$a_{rs} \cdot a_{sr} = 1 \quad ; \quad a_{rr} = 1$$

che rappresentino due diverse configurazioni — (nel tempo o nello spazio) di un certo aspetto di fenomeno statistico, si pone la quistione di confrontare le due configurazioni; sia attraverso gli invarianti, sia attraverso l'indice di irregolarità, sia attraverso gli indici delle singole modalità del fenomeno.

Pertanto, consideriamo che sieno

$$P' \equiv \begin{Vmatrix} 1 & a'_1 & \dots & a'_n \\ \frac{1}{a'_1} & 1 & \dots & \frac{a'_n}{a'_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{a'_n} & \frac{a'_1}{a'_n} & \dots & 1 \end{Vmatrix} \quad ; \quad P'' \equiv \begin{Vmatrix} 1 & a''_1 & \dots & a''_n \\ \frac{1}{a''_1} & 1 & \dots & \frac{a''_n}{a''_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{a''_n} & \frac{a''_1}{a''_n} & \dots & 1 \end{Vmatrix}$$

le due matrici anzidette, relative a due istanti dello stesso fenomeno o a due fenomeni analoghi.

Anzitutto, potremo formare la matrice di mutuo rapporto degli indici

$$Y_{2,1} \equiv \begin{Vmatrix} 1 & i_1 & \dots & i_n \\ \frac{1}{i_2} & 1 & \dots & \frac{i_n}{i_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{i_n} & \frac{i_1}{i_n} & \dots & 1 \end{Vmatrix} \qquad i_r = \frac{a''_r}{a'_r}$$

e quindi, a partire da questa, formare l'invariante e successivamente l'indice di variazione:

$$\omega_{,} = \frac{\overline{j} - \overline{\eta}}{\overline{j}}$$

essendo $\overline{j}$ media aritmetica; $\overline{\eta}$ media armonica delle $1, i_1 \dots i_n$.

Osserviamo che se invece di formare gli indici di P'' rispetto a P', formiamo quelli di questi rispetto a quelli, le i_v vengono sostituite dalle $\frac{1}{i_r}$, e queste da quelle. Sicchè la matrice $V_{1,2}$, differisce da quella $V_{2,1}$ per lo scambio delle linee con le colonne.

L'invariante resta sostanzialmente lo stesso.

Come seconda formazione, si può considerare il rapporto dei due invarianti delle due matrici originarie, cioè

$$\rho = \frac{(1 + a''_1 + \dots + a''_n)\left(1 + \frac{1}{a''_1} + \dots + \frac{1}{a''_n}\right)}{(1 + a'_1 + \dots + a'_n)\left(1 + \frac{1}{a'_1} + \dots + \frac{1}{a'_n}\right)} = \frac{\overline{m}''}{\overline{m}'} \cdot \frac{\overline{\mu}}{\overline{\mu}''}$$

dove $\overline{m}''$, $\overline{m}'$; $\overline{\mu}''$, $\overline{\mu}'$ sono rispettivamente le medie aritmetiche delle a'', a', e quelle armoniche (*includendovi l'unità*); si ha pure:

$$\rho = \frac{\frac{1}{n} + \left(m'' + \frac{1}{\mu''}\right) + n\,\frac{m''}{\mu''}}{\frac{1}{n} + \left(m' + \frac{1}{\mu'}\right) + n\,\frac{m'}{\mu''}}$$

l'unità essendo *esclusa* nella formazione delle m, μ.

Questo indice dà la variazione della P'', rispetto alla P', ed è quindi il reciproco di quello che misura la variazione di questa rispetto a quella.

6. Se invece si vuole un'altra misura simmetrica del divario esistente fra le due, entra in giuoco il fatto fondamentale che si deve tener conto dei due rapporti, diretto ed inverso, insieme.

Quindi occorre considerare $\rho + \frac{1}{\rho}$; e siccome il minimo valore di questo (ρ essendo positivo) è 2, si considererà l'indice di scostamento

$$\sigma = 1 - \frac{2}{\rho + \frac{1}{\rho}} \; ;$$

esso è nullo se $\rho = 1$, se quindi i due invarianti risultano eguali; e 1 se $\rho = \infty$ oppure $\rho = 0$; è inoltre simmetrico rispetto alle due tabelle; esso vale;

$$\sigma = \frac{(\overline{m}'' \, \overline{\mu}' - \overline{m}' \, \overline{\mu}'')^2}{(\overline{m}'' \, \overline{\mu}')^2 + (\overline{m}' \, \overline{\mu}'')^2}$$

Dobbiamo osservare che questo indice σ non è altro che un indice ω collegato alla tabella dei rapporti mutui degli invarianti; infatti questa è

	π'	π''
π'	1	$\frac{H''}{H'}$
π''	$\frac{H'}{H''}$	1

ed è precisamente

$$\begin{Vmatrix} 1 & \rho \\ \frac{1}{\rho} & 1 \end{Vmatrix} ,$$

di cui l'indice ω_0 è precisamente quello σ ora definite.

Vi è infine un terzo modo per confrontare P' e P''.

Conveniamo di chiamare «*media equivalente*» al gruppo dei rapporti $a_1, a_2, \ldots a_n$, quel numero α tale che posto invece di tutte le a, precisamente α, la nuova matrice risulti avere invarianti eguale a quello della data. Ora la matrice calcolata con le α è:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \alpha \ldots \alpha \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & 1 \ldots 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{1}{\alpha} & 1 & 1 \ldots 1 \end{Vmatrix}$$

di cui l'invariante è precisamente

$$(1+n\alpha)\left(1+\frac{n}{\alpha}\right)=1+n\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+n^2$$

Se I era l'invariante di quella delle a, deve per definizione risultare:

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)+\left(n+\frac{1}{n}\right)\equiv\frac{I}{n}$$

e quindi

$$\alpha^2+\left(n+\frac{1}{n}-\frac{I}{n}\right)\alpha+1=0.$$

(Per questa « media equivalente » si confronti: Pietro MARTINOTTI. *Estensione del concetto di media.* Giornale degli Economisti e Annali di Economia, Luglio-Agosto 1939).

Questa equazione presenta precisamente due radici reciproche $\left(\alpha'=\alpha,\ \alpha''=\frac{1}{\alpha}\right)$ il che può essere giustificato appunto dal poter scambiare α con $\frac{1}{\alpha}$ senza che sostanzialmente il quadro muti (una è più vicina alla media aritmetica, l'altra all'inversa dell'armonica).

Si può vedere subito che α è compreso fra la media aritmetica delle sole a, e l'inversa della loro media armonica

Osserviamo ancora che se si formassero le due matrici

$$\left\|\begin{matrix} 1 & m & m \dots m \\ \frac{1}{m} & 1 & 1 \dots 1 \\ \frac{1}{m} & 1 & 1 \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\| , \quad \left\|\begin{matrix} 1 & \mu & \mu \dots \mu \\ \frac{1}{\mu} & 1 & 1 \dots 1 \\ \frac{1}{\mu} & 1 & 1 \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots \end{matrix}\right\|$$

con la media aritmetica m delle sole $a_1 \dots a_n$, o con quella armonica μ, l'invariante della prima risulta maggiore di quello relativo alle a e questo a sua volta maggiore di quello relativo alla μ.

Orbene, a partire dalla media equivalente α noi potremo formare il rapporto $\frac{\alpha''}{\alpha'}$ e quello reciproco $\frac{\alpha'}{\alpha''}$, e quindi un terzo indice

$$\beta=1-\frac{2}{\frac{\alpha''}{\alpha'}+\frac{\alpha'}{\alpha''}}=\frac{(\alpha''-\alpha')^2}{\alpha''^2+\alpha'^2}$$

che misura anch'esso il divario fra le due P' e P'' in modo simmetrico.

Infine, come quarta ed ultima formazione dedotta dai procedimenti indicati, possiamo partire dalla tabella H; formare la media equivalente agli indici i, chiamandola η, ed esaminare ancora così la variazione ottenuta nel passaggio da P' a P''.

7. Ma i più significativi restano l'indice ω e l'indice σ simmetrici, ρ non simmetrico.

In complesso, per seguire le variazioni del supposto fenomeno economico, si hanno dunque:

I. Il confronto fra le variazioni delle medie equivalenti dei prezzi, delle quantità, dei valori.

II. Il confronto fra gli indici ω. σ relativi agli indici dei prezzi, delle quantità, dei valori.

III. Il confronto fra gli indici ρ relativi agli indici dei prezzi, delle quantità, dei valori.

Il primo confronto sostituisce quello delle medie abitualmente usato (Cfr. de Meo); quello degli indici ω pone in rilievo in modo simmetrico le successive variazioni di un certo stato con quello iniziale; mentre il confronto degli indici σ porrà in evidenza il divario, fra due stadi, ma in modo simmetrico. Infine gli indici ρ caratterizzano la variazione di uno stato della matrice, riferita ad un precedente.

Più generalmente, in un qualunque fenomeno di scambio con i metodi ora indicati, occorrerà esaminare: le ragioni mutue, le intensità mutue, i volumi mutui di scambio.

Contributo alla conoscenza dei silicati e degli alluminati di calcio idrati

Nota del dott. **Vittorio Cirilli**, *presentata dal socio* **G. Malquori**

(Adunanza del dì 13 gennaio 1940 - XVIII)

Sunto. — Sono stati studiati a mezzo di misure calorimetriche, dei prodotti a rapporto CaO/SiO_2 variabile, ottenuti sia facendo reagire dell' acqua di calce su del gelo di silice sia sottoponendo all' idrolisi progressiva il silicato tricalcico. I risultati ottenuti hanno confermato l' esistenza dei silicati: $CaO. SiO_2$. Acq. e $3 CaO. 2 SiO_2$. Acq.

I dati calorimetrici ed il confronto degli spettrogrammi Debye dei prodotti esaminati escludono la possibilità di formazione, nelle condizioni sperimentali descritte, dei silicati: $2 CaO. SiO_2$. Acq. e $CaO. 2 SiO_2$ Acq.

Dalle concentrazioni delle soluzioni in equilibrio con i solidi si deduce che: il silicato $3 CaO. 2 SiO_2$. Acq. è stabile solo in presenza di soluzioni molto concentrate di calce ($> 1,1$ CaO $^0/_{00}$). Tra i valori di concentrazione compresi tra 1,1 e 0,075 gr. di CaO per litro esiste una soluzione solida di composizione variabile da $CaO/SiO_2 = 1,5$ a $CaO/SiO_2 = 1$. Per valori del rapporto $CaO/SiO_2 < 1,5$ del corpo di fondo, gli spettrogrammi risultano simili tra di loro indipendentemente dal contenuto di calce del solido.

Sono stati inoltre determinati i calori di soluzione degli alluminati di calcio per le composizioni corrispondenti ai rapporti molecolari: $CaO/Al_2O_3 = 2, 3, 4$ e per gli idrati che ne derivano. L' andamento delle curve dei calori di idratazione fornisce degli utili ragguagli circa il legame che deve essere attribuito alle molecole di acqua contenute nei vari sali. I valori dei calori di soluzione e lo studio degli spettrogrammi hanno permesso di stabilire che la disidratazione totale degli alluminati studiati provoca la loro scomposizione in trialluminato pentacalcico e ossido di calcio.

I silicati di calcio idrati possono esser ottenuti per vie differenti: per reazione diretta fra silice e idrossido di calcio, per idrolisi dei silicati di calcio anidri, per precipitazione. I prodotti così ricavati hanno aspetto gelatinoso ed all' atto in cui essi prendono origine risultano essenzialmente amorfi.

Per sintesi idrotermale, o per idratazione dei silicati anidri con vapore a temperatura elevata, si ottengono invece idrati decisamente cristallini.

Un numero veramente notevole di indagini verte sulla reagibilità fra la silice e la soluzione di calce, reagibilità che a parità di concentrazione

della soluzione predetta, dipende dallo stato della silice nel senso che è massima per i preparati estremamente dispersi e sub-amorfi.

È ammesso quasi concordemente che fra i prodotti della reazione trovi posto il silicato monocalcico [1]. Tuttavia le possibilità della reazione non si limitano a detto composto; infatti per concentrazioni sufficienti di calce della soluzione di contatto è possibile far salire il rapporto CaO/SiO_2 nel solido, a valori compresi fra 1 e 2.

Sul legame da attribuirsi a questa calce eccedente rispetto al rapporto 1 : 1, le opinioni sono discordi di guisa che accanto alla interpretazione dell'adsorbimento [2] è stata avanzata quella della esistenza di silicati più basici come: $3 CaO. 2 SiO_2$. Acq., oppure $2 CaO. SiO_2$. Acq.

Flint e Wells [3] asseriscono, ad esempio, che oltre al silicato 1 : 1 possono esistere altri tre composti e precisamente 1 : 2, 3 : 2, 2 : 1.

Beitlich [4], Kühl e Mann, Nacken, Nacken e Mosebach, Bessey, Tavasci, Thorvaldson e Vigfusson [5], interpretano anch'essi i risultati delle loro esperienze ammettendo la presenza nei corpi di fondo in contatto con soluzioni di calce di concentrazione elevata, di silicati differenti a rapporto: CaO/SiO_2 compreso fra 1 e 2.

A chiarire ulteriormente il quesito non ha infine contribuito gran che lo studio dell'andamento dell'idrolisi dei silicati anidri [6].

Sulla struttura dei solidi idratati ottenuti per reazione fra calce e silice a temperatura ordinaria, o per idratazione dei composti anidri, ricordo che per quanto alcuni autori affermino di aver ricavato dei prodotti cristallizzati in forma di piccoli aghi, i silicati idrati di calcio ottenuti in uno dei modi sopracitati sono stati, fino a tempi a noi molto vicini, generalmente considerati come sostanze amorfe.

---

[1] Le Chatelier H., *Recherches experimentales sur la constitution des mortiers hydrauliques*. Parigi, 1904. — Thorvaldson T. e Vigfusson V. A., Trans. Roy. Soc. Can. *22*, 423, (1928). — Jolibois P. e Chassevent L., Compt. Rend. *188*, 452, (1929). — Van der Burgh A., Chem. Weekblad *29*, 616, (1932). — Tavasci B., Ann. Chim. Appl. *23*, 413, (1933). — Flint E. P. e Wells L. S., Bur. Stand. J. Res. *12*, 751, (1934). — Kühl H. e Mann A., Tonind. Ztg. *58*, 862, (1934). — Nacken R., Zemet. *24*, 183, (1935). — Nacken R. e Mosebach K., Zeit. anorg. allg. Chem. *223*, 161, (1935). — Maffei A., Gazz. Chim. Ital. *66*, 197, (1936). — Bessey G. E., *Symposium on the chemistry of cements*. Stoccolma, 1938.

[2] Le Chatelier H., l. c.; Chassevent, XIV° Cong. Chimie Industrielle. Parigi, 1934.

[3] L. c.

[4] Beitlich A. E., J. Amer. Chem. Soc., *60*, 1832, (1938).

[5] L. c.

[6] Tavasci B., L. c.; Kühl H. e Mann A., L. c.; Nacken R., L. c.

Chassevent [1]) ha però osservato che trattando un sol di silice con dell'acqua di calce si ottengono dei prodotti che, per quanto debolmente, sono capaci di provocare la diffrazione dei raggi X.

Brandenberger [2]) ha confermato l'osservazione di Chassevent esaminando dei prodotti ottenuti per idrolisi del silicato tricalcico.

Bessey [3]) ha potuto osservare la formazione di un silicato idrato di calcio nettamente cristallino. La sostanza, debolmente birifrangente, con indice di rifrazione di circa 1,51, aveva una composizione corrispondente a $3\,CaO.\ 2\,SiO_2$. Acq.

Mi sono proposto di integrare i risultati ricavati con l'impiego dei metodi analitici generalmente seguiti dai vari studiosi, con un metodo capace di fornire delle indicazioni di altra specie intorno alla costituzione delle varie fasi solide del sistema: $CaO - SiO_2 - H_2O$.

Ho adottato la misura del calore di soluzione in HCl a titolo noto, della calce contenuta in prodotti a rapporto: CaO/SiO_2 variabile.

Nel caso in questione l'energia che tiene unite: calce e silice, è fornita dalla differenza tra l'effetto termico che si ottiene nella soluzione di una determinata quantità di ossido di calcio, e quello che produce un' uguale quantità di ossido di calcio legato alla silice.

In una prima fase delle esperienze che vengo descrivendo ho studiato i prodotti a rapporto: CaO/SiO_2 variabile ricavati facendo passare dell'acqua di calce satura sopra del gelo di silice ottenuto per precipitazione.

Ho adottato vari accorgimenti per annullare od almeno ridurre al minimo, le possibilità d'inquinamento da parte della CO_2 dell'aria; pertanto la reazione fra le due sostanze è stata fatta avvenire in un apparecchio appositamente costruito [4]).

Occorre osservare che sia il gelo di silice secco, sia, come vedremo in seguito, i prodotti della reazione, hanno un notevole calore di bagnamento. Le misure calorimetriche furono quindi eseguite su prodotti fortemente umidi ($H_2O = 70 \div 80\,\%$) in modo da eliminare questa possibilità di errore.

---

[1]) L. c.

[2]) Brandenberger E., Schweizer Archiv, *3*, 239, (1937).

[3]) L. c.

[4]) Esso è costituito da un pallone di vetro chiuso da un tappo di gomma munito di due tubi. Attraverso uno di questi entra l'acqua di calce, la quale dopo aver reagito con il gelo di silice esce dal secondo tubo. La velocità di afflusso del liquido è regolata in modo che la soluzione uscente sia ancora notevolmente concentrata in calce. Il corpo di fondo viene agitato di tanto in tanto a mezzo di un agitatore a chiusura a mercurio, azionato da un motorino. Per il prelevamento

Il calorimetro usato è già stato da me precedentemente descritto [1]).

Ho usato come liquido di reazione l'HCl N nel quale i vari prodotti si disciolgono con sufficiente velocità,

Nella Tab. I sono riportati i valori medi dell'effetto termico unitario (cal/gr. CaO) in funzione del rapporto CaO/SiO_2.

TABELLA I.

CaO/SiO_2	cal/gr. CaO	CaO/SiO_2	cal/gr. CaO
0,048	359,5	0,833	365,0
0,135	360,0	0,903	365,5
0,200	358,5	0,943	361,5
0,382	360,0		
0,485	365,0	1,080	386,0
0,610	366,0	1,150	399,0
0,775	367,0	1.180	413,0

È evidente che l'effetto termico si mantiene all'incirca costante fino a quando il rapporto CaO/SiO_2 non ha raggiunto il valore 1. A partire da questo punto il suo aumento indica che la calce è legata più labilmente.

La costanza dell'effetto termico unitario nel primo intervallo mostra che il primo composto formatosi nella reazione è il silicato monocalcico, ed esclude la possibilità di formazione di silicati più acidi, nelle condizioni sperimentali descritte.

Per il silicato monocalcico possiamo assumere un valore medio per il calore di soluzione in HCl N di 362,6 cal/gr. CaO. Per l'ossido e per l'idrossido di calcio puri ho determinato un calore di soluzione in HCl N rispettivamente di 835,8 cal/gr. (46,86 Cal/Mol.) e 557,9 cal/gr. CaO (31,28 Cal/Mol.).

Da questi dati si calcola per il silicato monocalcico fortemente idratato un calore di formazione di 26,5 Cal/Mol.

Sul come sia legata la calce nei prodotti a rapporto $CaO/SiO_2 > 1$ è difficile rispondere in base ai dati sin qui riportati. Si può solo osservare che il calore di soluzione unitario è per questi preparati alquanto superiore a quello che si calcola per un miscuglio di CaO. SiO_2. Acq. e idros-

---

del campione, il liquido mantenuto in agitazione viene aspirato, sempre fuori del contatto dell'aria, su di un setto poroso.

Su di una porzione della sostanza prelevata e lavata con poca acqua, ho determinato il rapporto CaO/SiO_2; sulla rimanente ho eseguito le misure calorimetriche.

Ho usato come liquido di reazione: 150 cc. di HCl N, quantità notevolmente superiore a quella richiesta dalla calce disciolta.

[1]) CIRILLI V., Ann. Chim. Appl., *28*; 251; (1938).

sido di calcio, ed escludere quindi che si tratti di un miscuglio delle due sostanze.

È da ritenersi invece probabile l'esistenza di un silicato più basico.

È noto che facendo agire sulla silice dell'acqua di calce concentrata, si ottengono dei prodotti con un rapporto CaO/SiO_2 fino a 1,7 ÷ 1,8. La reazione però è lenta e richiede una quantità notevole di acqua di calce, il che rende possibile, malgrado gli accorgimenti presi per impedire la carbonatazione, un inquinamento della sostanza per opera dell'anidride carbonica dell'aria. Ho preferito pertanto proseguire la sperimentazione su preparati ottenuti sottoponendo all'idrolisi progressiva il silicato tricalcico, nei limiti di composizione dei corpi di fondo compresi tra $CaO/SiO_2 = 2.4$ e $CaO/SiO_2 = 0,5$.

Il silicato tricalcico quando è posto in contatto con acqua si idrata rapidamente, però, a seguito dell'attacco le particelle si ricoprono in superficie di uno strato di sostanza gelatinosa che ritarda l'idratazione del cuore dei granuli.

Ho creduto per questo di procedere all'idratazione del solido in un mulinetto a palle, onde poter rompere le pellicole protettive.

Ho usato 20 gr. di silicato tricalcico e 500 cc. di acqua; a idratazione avvenuta ho travasato rapidamente la soluzione in un apparecchio nel quale il solido è stato sottoposto all'idrolisi progressiva [1]).

Durante l'idrolisi ho avuto cura che la concentrazione in calce del liquido di contatto variasse molto lentamente per modo da impedire che si potessero originare dei gradienti di concentrazione della calce nel solido del corpo di fondo.

Prima di procedere ad un prelevamento ho determinato la concentrazione del liquido di contatto ed ho considerato raggiunto l'equilibrio quando tre analisi successive, distanziate di vari giorni, risultavano concordanti.

Le misure di calore di soluzione le ho eseguite sia su prodotti fortemente umidi, come nel caso precedente, sia su sostanze seccate su P_2O_5 e KOH nel vuoto fino a costanza di peso, al fine questo di poter trarre delle indicazioni intorno al legame dell'acqua.

Come liquido di reazione, data la maggiore lentezza con cui alcuni prodotti si discioglievano nell'acido N, ho usato l'HCl 3,5 N.

---

[1]) L'apparecchio è del tutto analogo a quello usato in precedenza allorchè si fece reagire l'acqua di calce sulla silice. Nel caso presente invece dell'acqua di calce, nel pallone viene fatta entrare dell'acqua distillata previamente bollita a lungo. L'idrolisi completa durò 4 mesi e la sostanza ultima rimasta dimostró di contenere una quantità minima di carbonato di calcio. La temperatura media delle esperienze è stata mantenuta sui $23^{\circ} \pm 0,5^{\circ}$.

I valori dell' effetto termico unitario riportati nella Tab. II, risultano dalla media di varie misure.

TABELLA II.

Preparati seccati		Preparati umidi	
CaO/SiO_2	cal/gr. CaO	CaO/SiO_2	cal/gr. CaO
2,40	514,0	2,01	489,0
2,28	509,9	1,83	480,0
2,09	504,3		
2,01	502,2	1,57	468,2
1,83	495,0	1,54	465,5
1,68	489,9	1,28	430,6
1,57	482,2		
1,38	471,6	1,06	395,4
1,28	462,8	0,995	377,3
1,10	447,9	0,530	375,5
0,995	442,0		

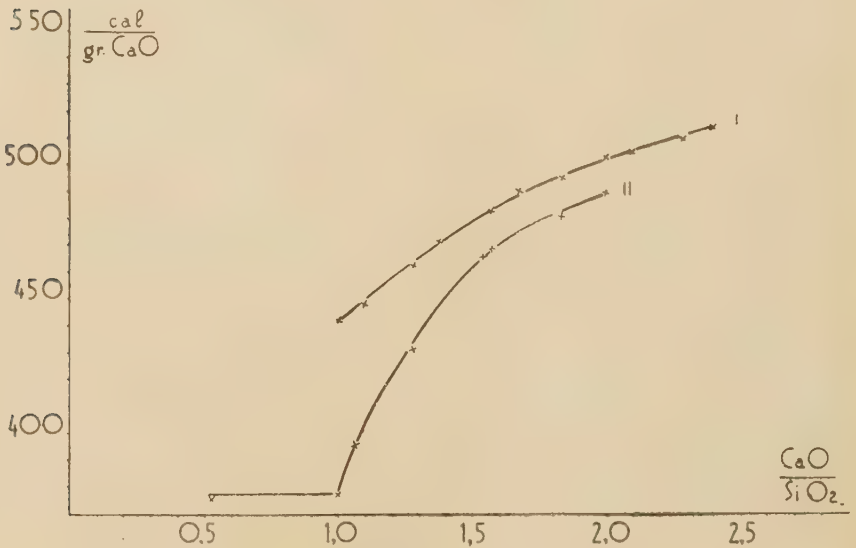



Fig. 1.

In base a questi dati sono state tracciate le curve I e II riportate in fig. 1.

Dette curve differiscono notevolmente presentando i vari preparati un calore di idratazione che è tanto più elevato quanto minore è il loro contenuto in calce. La variazione della superficie specifica che si verifica du-

rante l'idrolisi è del resto ben visibile dall' aspetto del corpo di fondo che assume sempre più nettamente l'aspetto di un gelo.

La curva superiore si riferisce ai prodotti secchi e non presenta discontinuità. Queste si notano invece nettamente nella curva inferiore II, relativa ai prodotti molto umidi. Le due discontinuità corrispondono ai rapporti $CaO / SiO_2 = 1$ e 1,5.

È pertanto lecito supporre che la comparsa del silicato monocalcico sia preceduta, durante l'idrolisi, da quella del silicato più basico: $3\,CaO.\,2\,SiO_2$. Acq.

Riguardo ai prodotti con rapporto $CaO / SiO_2 > 1{,}5$, i dati calorimetrici corrispondono a quelli di un miscuglio del silicato $3\,CaO.\,2\,SiO_2$. Acq. e idrossido di calcio. Dalla curva I risulta per il composto $3\,CaO.\,2\,SiO_2$. Acq. un valore del calore di soluzione di 478 cal / gr. CaO. Per la calce in eccesso rispetto a $3\,CaO.\,2\,SiO_2$ si ottengono i valori riportati nella Tab. III, valori che sono molto vicini a quello di 573,0 cal / gr. CaO (32,13 Cal / Mol.) determinato per l'idrossido di calcio in HCl 3,5 N.

Tabella III.

CaO/SiO_2	cal / gr. CaO
2,40	573,7
2,28	570,6
2,09	571,0
2,01	573,4
1,83	572,4
1,68	588,7
1,57	561,2

Ciò rende probabile l'esistenza di un miscuglio di $3\,CaO.\,2\,SiO_2$. Acq. e $Ca(OH)_2$.

Da rilevare inoltre che i prodotti a rapporto CaO / SiO_2 compreso fra 1 e 1,5 accusano dei calori di soluzione superiori a quelli che si calcolano supponendo essere detti preparati costituiti da un miscuglio di idrossido di calcio e silicato monocalcico.

Nella fig. 2 e nella Tab. IV sono riportate le concentrazioni delle soluzioni in contatto con i corpi di fondo sin qui considerati.

TABELLA IV.

$t^{0} = 23^{0} \pm 0,5^{0}$

Rapporto CaO/SiO_2 nel corpo di fondo	Composizione della soluzione di contatto CaO gr/l
2,40	1,48
2,28	1,40
2,09	1,25
2,01	1,23
1,83	1,19
1,68	1,18
1,57	1,14
1,38	1,03
1,28	0,52
1,10	0,20
1,06	0,10
0,995	0,075

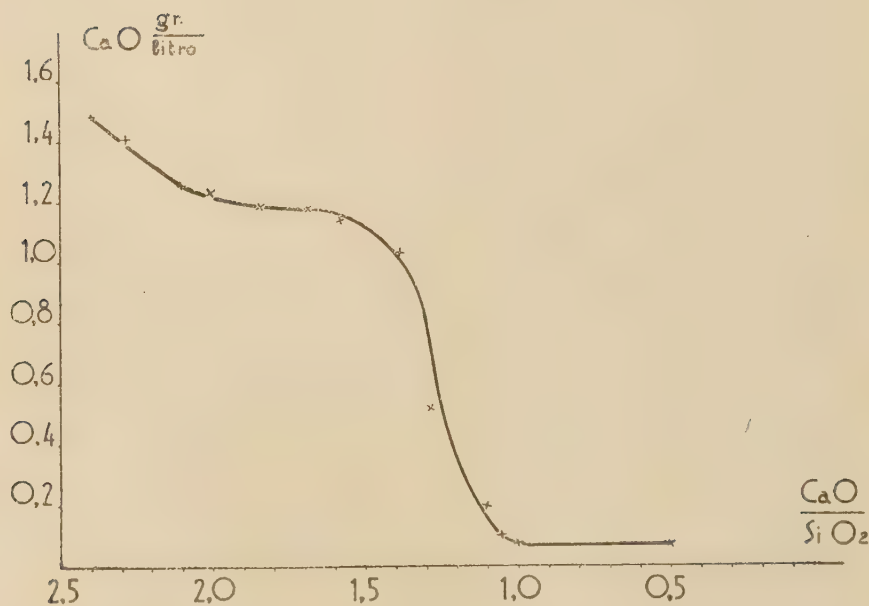



Fig. 2.

La prima determinazione eseguita in corrispondenza del corpo di fondo con rapporto $CaO/SiO_2 = 2,4$ ha fornito un valore di 1,48 gr. di CaO litro. Il liquido era perciò fortemente soprasaturo, se si considera che per la

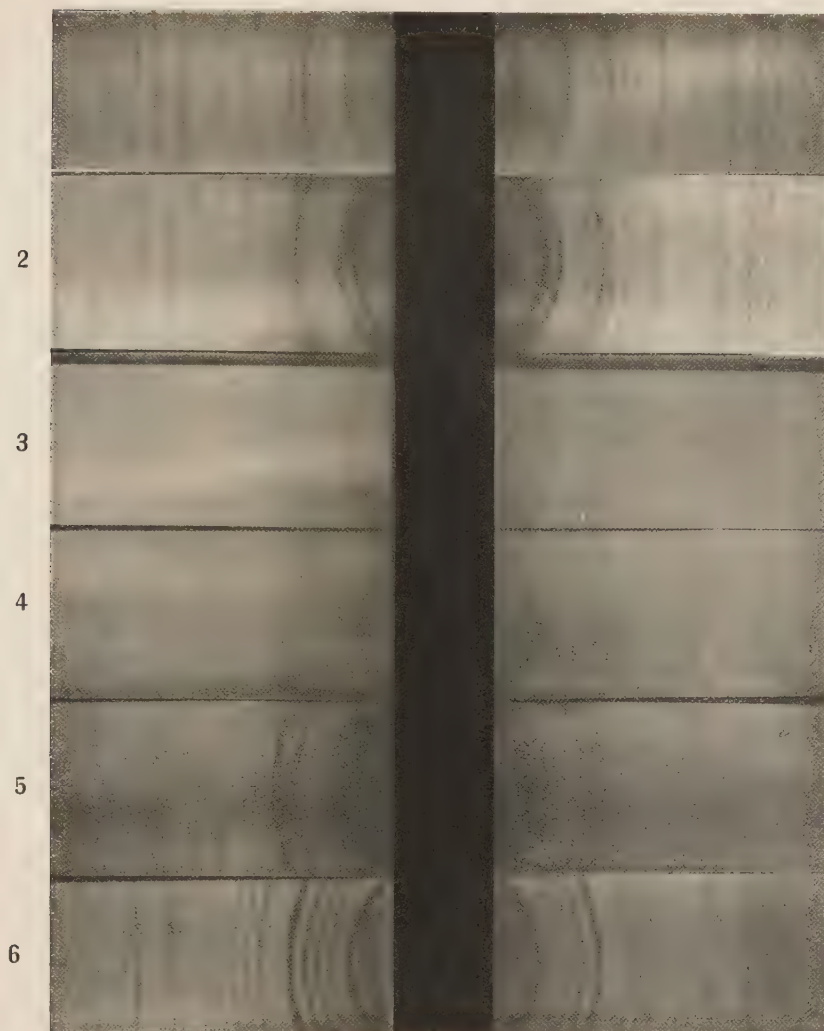



Fig. 3.

1) $Ca(OH)_2$ | 2) $CaO / SiO_2 = 2{,}4$
3) $CaO / SiO_2 = 1{,}68$ | 4) $CaO / SiO_2 = 1{,}54$
5) $CaO / SiO_2 = 0{,}995$ | 6) $Ca\ CO_3$

concentrazione della soluzione satura alla temperatura di esperienza (23°) ho trovato un valore di 1,24 gr. di CaO per litro. Il valore normale è stato raggiunto in vicinanza del rapporto $CaO / SiO_2 = 2$.

Proseguendo l'idrolisi la concentrazione del liquido resta costante ($CaO = 1,18 \div 1,19$ gr / l) e molto vicina al valore corrispondente alla soluzione satura, per quanto sempre leggermente inferiore, fino a quando il corpo di fondo non ha raggiunto il rapporto $CaO / SiO_2 = 1,5$. Per questa composizione la concentrazione della soluzione era di circa gr. 1,1 CaO / litro.

Per rapporti: CaO / SiO_2 compresi fra 1,5 e 1, la soluzione si impoverisce rapidamente di calce; in corrispondenza del rapporto $CaO / SiO_2 = 1$ ho ottenuto un valore di circa 0,07 gr. CaO / litro. La diminuzione della concentrazione è regolare e la curva non presenta l'arresto corrispondente alla scissione idrolitica di $3\,CaO.\ 2\,SiO_2$. Acq.

Possiamo concludere pertanto che il corpo di fondo è costituito da una unica fase la cui composizione varia con continuità con il variare della concentrazione del liquido entro limiti compresi fra $3\,CaO.\ 2\,SiO_2$. Acq. e $CaO.\ SiO_2$. Acq.

Interessante si è dimostrata l'osservazione degli spettri Debye dei vari preparati. Per rapporti $CaO / SiO_2 > 1,6$ vi si notano con molta chiarezza le righe dell'idrossido di calcio accanto ad altre righe che possono essere attribuite al silicato; per rapporti inferiori si ottengono invece degli spettrogrammi molto simili, indipendentemente dalla quantità di calce contenuta nei preparati stessi (Fig. 3). Ciò è in accordo con quanto è stato osservato da Chassevent e da Brandenberger e dimostra che queste sostanze hanno struttura cristallina.

Il fatto che negli spettrogrammi dei prodotti a rapporto $CaO / SiO_2 > 1,6$ si osservano le righe dell'idrossido di calcio costituisce conferma di quanto è stato ammesso in base ai dati calorimetrici. Non spiega però come sia effettivamente possibile, in presenza di soluzioni sature di CaO, di ottenere dei prodotti a rapporto CaO / SiO_2 notevolmente superiore a 1,5, e perchè la concentrazione di calce della soluzione in equilibrio con i solidi compresi tra $CaO / SiO_2 = 1,5$ e 2 risulta leggermente inferiore a quella della soluzione satura.

G. E. Bessey [1]) che ha trovato andamento analogo per un isoterma a 17° del sistema: $SiO_2 — CaO — H_2O$, ritiene che tale comportamento possa essere interpretato ammettendo che nel tratto di isoterma in questione siano presenti a corpo di fondo le due fasi solide: $2\,CaO.\ SiO_2$. Acq. e $3\,CaO.\ 2\,SiO_2$. Acq., a meno di non voler cercare la spiegazione del fenomeno nell'esistenza di una soluzione solida tra $3\,CaO.\ 2\,SiO_2$. Acq. e $Ca(OH)_2$, oppure in un'ipotetica influenza di solubilità non altrimenti precisata.

[1]) L. c.

È lecito dai risultati dell'esame röntgenografico da me eseguito, di escludere l'interpretazione del BESSEY circa la natura dei solidi presenti lungo il tratto di isoterma compreso fra i valori 2 e 1,5 del rapporto CaO / SiO_2 del corpo di fondo. Resta tuttavia da chiarire ulteriormente perchè, se dell'idrossido di calcio è presente a corpo di fondo, la soluzione di equilibrio accusa una concentrazione di calce leggermente inferiore a quella che spetta alla soluzione satura di $Ca(OH)_2$.

Comunque si voglia spiegare il fenomeno, resta assodato dall'assieme dei risultati ottenuti, che esiste una differenza tra la calce trattenuta in più di ciò che corrisponde al silicato monocalcico, in ciascuno dei due tratti compresi fra i valori 1 e 1,5, e 1,5 e 2 del rapporto CaO / SiO_2 del corpo di fondo.

Nel primo tratto infatti detta calce accusa un calore di soluzione superiore a quello corrispondente all'idrossido di calcio e non si notano negli spettrogrammi le righe di questo composto che invece compariscono nettamente nel secondo tratto nel quale, per la calce trattenuta in più del rapporto 1,5, si calcolano dei valori del calore di soluzione uguali a quelli dell'idrossido libero.

Dalla perdita di peso alla calcinazione delle sostanze seccate su P_2O_5 ho dedotto che i due composti corrispondenti alle discontinuità della curva II (Fig. 1) hanno la composizione: $3 CaO. 2 SiO_2 . 3 H_2O$ e $CaO. SiO_2 . H_2O$.

In base al calore di soluzione dell'ossido di calcio in HCl 3,5 N (850,4 cal/gr.; 47,68 Cal/Mol.) e del valore di 461 calorie che si deduce per estrapolazione della curva II (Fig. 1) si calcola per il silicato idrato: $3 CaO. 2 SiO_2$, fortemente umido, un calore di formazione di 65,5 Cal/Mol. Per il composto secco il calore di soluzione è di 478 cal/gr. CaO; ne deriva un calore di formazione di 62,6 Cal/Mol. ed uno sviluppo di calore per l'ulteriore idratzione di 2,9 Cal/Mol., differenza questa che può attribuirsi al calore di bagnamento.

Per il silicato monocalcico ho determinato sperimentalmente come varia il calore di soluzione in funzione dell'acqua trattenuta. I risultati sono riportati nella Tab. V e con essi è stata tracciata la curva della Fig. 4.

TABELLA V.

$CaO. SiO_2 . H_2O$	cal/gr. = 442,0
» » 1,21 H_2O	428,1
» » 1,25 »	418,7
» » 1,81 »	400,0
» » 6 »	388,6
» » 26 »	377,3

Lo svolgimento di calore è molto notevole per la prima molecola di acqua, per le successive esso tende rapidamente a diminuire.

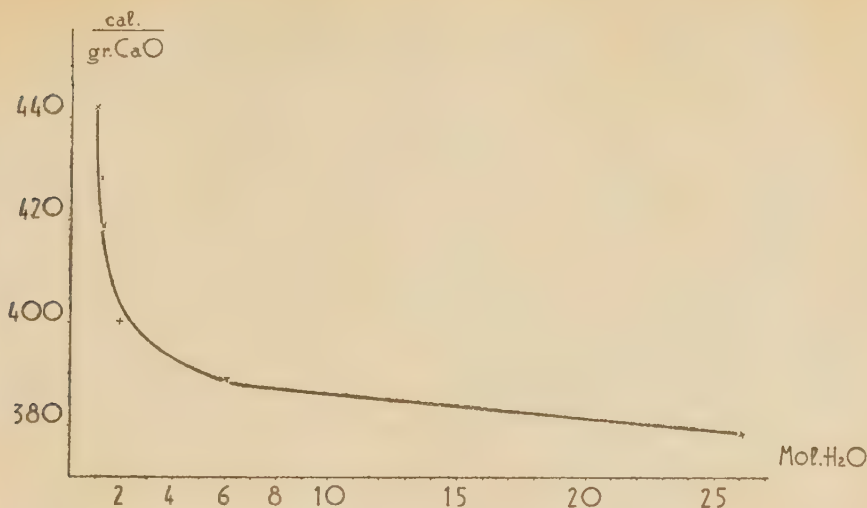



Fig. 4.

Le sostanze a vario grado di idratazione mostrano tutte il medesimo spettrogramma e da ciò si deduce che l'acqua trattenuta è di natura zeolitica oppure si tratta di acqua adsorbita, ipotesi quest'ultima che appare giustificata dall'aspetto gelatinoso dei preparati.

Dai dati calorimetrici si deduce inoltre, per il silicato $CaO.SiO_2.H_2O$, un calore di formazione di 22,9 Cal/Mol.; per la stessa sostanza fortemente idratata esso risulta di 26,5 Cal., in accordo con il valore determinato per il silicato monocalcico preparato dal gelo di silice e acqua di calce.

La differenza di 3,6 Cal. (31 cal. per grammo di $CaO.SiO_2$) tra il calore di formazione della sostanza umida e quello della sostanza secca la considero come calore di bagnamento. Si deduce in base a questa ammissione che i preparati in questione hanno uno sviluppo superficiale dell'ordine di quello del gelo di silice (32 cal/gr.) [1].

Sugli alluminati di calcio idrati, composti decisamente cristallini, le notizie di cui si dispone sono assai numerose e per molti aspetti più esaurienti di quelle che la letteratura fornisce a riguardo dei silicati idrati. Tuttavia alcuni capitoli della fisico-chimica di questi composti richiedono per la loro sistemazione ulteriore materiale sperimentale.

Caratteristica degli alluminati di calcio è quella di potersi legare con

[1]) Ewing D. T. e Bauer G. T., J. Amer. Chem. Soc., *59*; 1548; (1937).

un numero rilevante di molecole di acqua per dare origine ad una serie di idrati di cui sia la composizione sia le condizioni di stabilità non sono note con esattezza.

È ritenuto concordemente da vari sperimentatori che non tutte le molecole di acqua dei diversi idrati sono legate in modo analogo e che, mentre un certo numero lo é molto labilmente, le rimanenti partecipano in maniera più essenziale alla struttura del sale.

FORSEN [1]) ha per questo cercato di applicare la teoria stereochimica di WERNER alla risoluzione del problema, ma è evidente che una spiegazione convincente non può essere data altrimenti che a mezzo della conoscenza della struttura di tali composti.

Per l'alluminato tetracalcico naturale 4 CaO. Al_2O_3. 12 H_2O (hydrocalumite) TILLEY, MEGAW e HEY [2]) hanno determinato le dimensioni della cella elementare ed hanno proposto la probabile struttura dell'idrato dimostrando che, malgrado l'aspetto esagonale, la sostanza effettivamente appartiene al sistema monoclino. Altrettanto deve ritenersi per il prodotto ottenuto artificialmente.

La struttura dell'alluminato tricalcico cubico esaidrato è stata determinata da BRANDENBERGER [3]).

Per gli alluminati cosidetti esagonali è stato inoltre osservato che i vari spettrogrammi DEBYE sono molto simili indipendentemente dal rapporto CaO/Al_2O_3.

Secondo BRANDENBERGER gli alluminati esagonali sono costituiti da strati di $Ca(OH)_2$ e di $Al(OH)_3$ in rapporto variabile e possono esser rappresentati dalla formula generale: $mCa(OH)_2$ $nAl(OH)_3$ pH_2O, in cui p indica il numero di molecole di acqua eliminabili per riscaldamento a 110°.

Quest' acqua non dovrebbe esser legata in determinate posizioni del reticolo ed ha quindi funzione analoga all' acqua trattenuta dalle zeoliti.

Come si comportano i vari alluminati al riscaldamento e quali prodotti si ottengono per disidratazione totale, è noto solo incompletamente.

MYLIUS [4]) ha determinato il numero di molecole di acqua trattenute dopo riscaldamento a 105°-115°, LEFOL [5]) ha tracciato le curve perdita di peso-temperatura sottoponendo alcuni idrati a temperature regolarmente crescenti, NACKEN [6]) ha adoperato il metodo tensioeudiometrico di HÜTTIG,

---

[1]) FORSEN L., Zement, *22*; 73; (1933).

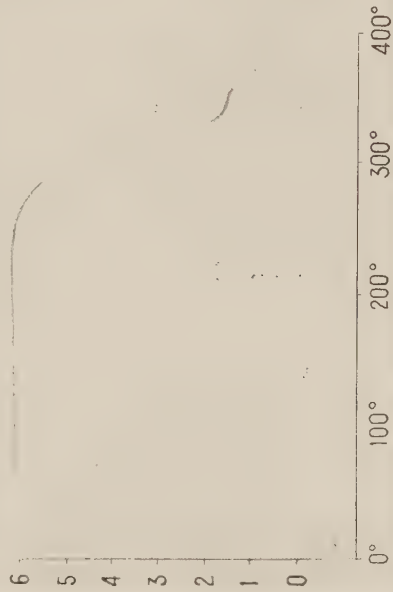
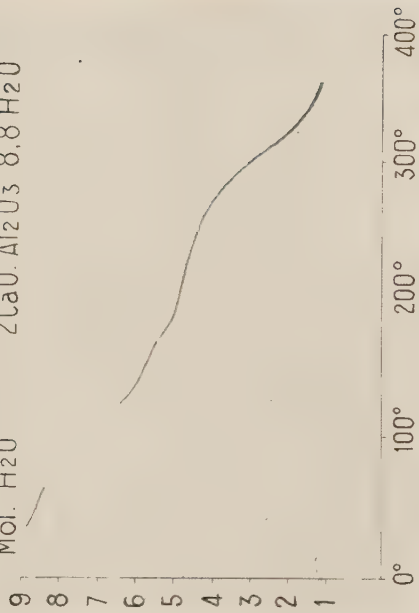
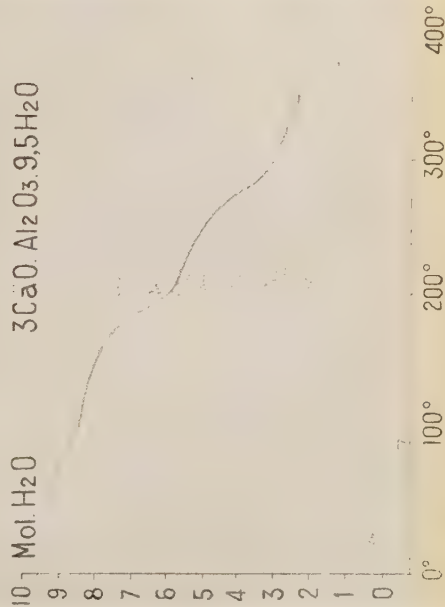
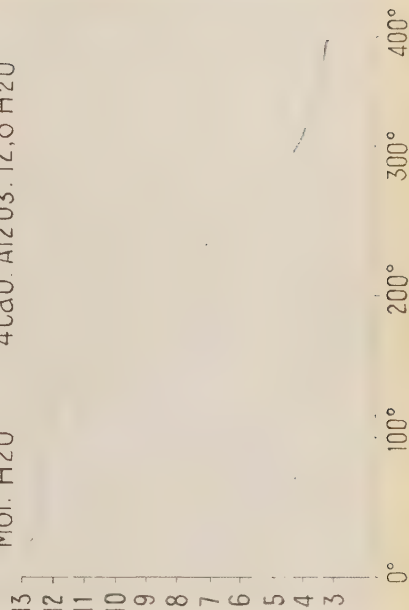
[2]) TILLEY C. E., MEGAW H. D., HEY M. H., Mineralogical Mag., *23*; 607; (1934).

[3]) BRANDENBERGER E., Schweiz. Mineralog. petrogr. Mitt. *13*; 569; (1933) Schweizer Archiv. *2*; 45; (1936).

[4]) MYLIUS C., Acta Acad. Aboensis. Math. Phys. VII; 3; (1933).

[5]) LEFOL J., *Sur l'hydratation des aluminates, des sels doubles, du silicate et du sulfate de calcium.* Sens. 1937.

[6]) NACKEN R., Zement, *26*; 715; (1937).

Mol. H2O
3CaO.Al2O3 6H2O
6
5
4
3
2
1
0
0°
100°
200°
300°
400°
Mol. H2O
2CaO.Al2O3 8,8 H2O
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0°
100°
200°
300°
400°
Mol. H2O
3CaO.Al2O3.9,5H2O
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
0°
100°
200°
300°
400°
Mol. H2O
4CaO.Al2O3.12,8 H2O
13
12
11
10
9
8
7
6
5
4
3
0°
100°
200°
300°
400°

Thorvaldson, Grace e Vigfusson [1]) hanno indicato infine le condizioni di stabilità, in funzione della tensione di vapore, per l'alluminato tricalcico esagonale a diversi gradi di idratazione.

I risultati ottenuti dai differenti sperimentatori sono però discordi ed in generale si presentano difficilmente utilizzabili ai fini di stabilire quali delle molecole di acqua che competono ai vari idrati possono essere considerate di costituzione.

Ho ritenuto pertanto utile di determinare a mezzo di misure calorimetriche l'entità dell'effetto termico provocato dalla formazione dei vari idrati, nella speranza di poter risalire a stabilire il legame dell'acqua nei composti in questione.

Ricerche calorimetriche per gli idrati dell'alluminato tricalcico sono state eseguite da Thorvaldson Brown e Peaker [2]); Salmoni [3]) ha pubblicato alcuni dati sul calore di soluzione di idrati dell'alluminato bicalcico.

Alluminato tricalcico [4])

L'alluminato tricalcico esagonale può legarsi con 11-12 Mol. di acqua.

Ponendo questo idrato, a temperatura ordinaria, in ambiente a tensione di vapore opportunamente decrescente, Thorvaldson, Grace e Vigfusson [5]) hanno stabilito la formazione degli idrati a 9,5 e 8 Mol. H_2O ed hanno osservato che quest'ultimo idrato, per bassissime tensioni di vapore,

---

[1]) **Thorvaldson** T., **Grace** N. S., **Vigfusson** V. A., Can. J. Research, *1*; 201; (1929).

[2]) **Thorvaldson** T., **Brown** W. B., **Peaker** C., J. Amer. Chem. Soc. *52*; 3927 (1930).

[3]) **Salmoni** R., Gazz. Chim. Ital. *64*; 719; (1934).

[4]) Ho determinato i vari calori di idratazione misurando il calore di soluzione in HCl a titolo noto degli alluminati anidri e degli idrati corrispondenti.

I prodotti anidri sono stati ottenuti sinterizzando alle temperature opportune, i miscugli stechiometricamente calcolati, di carbonato di calcio e ossido di alluminio. Gli idrati sono stati ottenuti sia per precipitazione sia per idratazione diretta, in acqua ghiacciata e priva di CO_2, dei prodotti sinterizzati corrispondenti. Circa 20 gr. della sostanza macinata finemente (passata allo staccio di 10.000 maglie / cm^2) sono stati posti in una bottiglia, in presenza di palline di vetro, ed agitati violentemente per più giorni, Il prodotto, dopo filtrazione, è stato analizzato e controllato nelle sue proprietà ottiche per stabilirne la omogeneità.

Per la determinazione del calore di soluzione ho usato un forte eccesso di HCl 3,5 nel quale i vari prodotti sono totalmente solubili.

I valori del calore di soluzione riportati nel corso della Nota corrispondono alla media ottenuta da varie misure.

[5]) L. c.

ha tendenza a perdere, sebbene molto lentamente, una quantità ulteriore di acqua.

Nacken [1]), afferma di aver ottenuto degli arresti nella disidratazione isobara in corrispondenza degli idrati a 10 — 6 — 4 — 2 Mol. H_2O.

Recentemente a mezzo di una termobilancia a registrazione fotografica ho tracciato [2]) la curva perdita di peso - temperatura di un prodotto contenente 9,5 H_2O ed ho posto in evidenza la successione degli idrati a 8 — 6 — 3 Mol. H_2O. (Fig. 5).

L'alluminato tricalcico cubico cristallizza con 6 Mol. H_2O. ed è stato osservato che questa sostanza, anche quando venga posta in ambiente ad elevata tensione di vapore, non ha alcuna tendenza a formare idrati superiori. Fino a 100° - 110° la quantità di acqua resta costante, a circa 270° si osserva la formazione di un nuovo idrato contenente 1,5 Mol. H_2O. (Fig. 5).

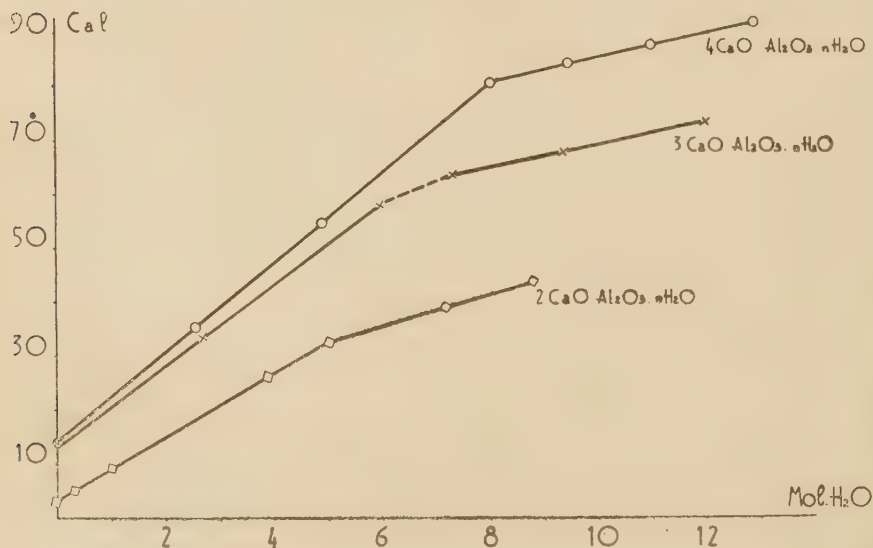



Fig. 6.

Mi è stato possibile di rilevare, a mezzo dell'indagine röntgenografica, che l'alluminato tricalcico esagonale per riscaldamento a temperature superiori a 100° si trasforma parzialmente nella forma cubica; non ho ritenuto pertanto opportuno eseguire per detto idrato misure calorimetriche su prodotti ottenuti a temperatura superiore all'ordinaria, ed ho limitato le esperienze agli idrati a 12 - 9,4 - 7,3 Mol. H_2O.

Il primo è stato ottenuto mantenendo la sostanza, seccata su $CaCl_2$,

---

[1]) L. c.

[2]) Cirilli V., Rend. Acc. Sc. Fis. e Mat. Napoli, 1940.

per lungo tempo in presenza di soluzione satura di nitrato di piombo, il secondo è stato ottenuto su $CaCl_2$ nel vuoto, ed il terzo invece su P_2O_5, sempre nel vuoto.

Ho preparato l'alluminato cubico riscaldando l'alluminato esagonale con $12 H_2O$, in acqua di calce a circa 80°. La trasformazione, che si può seguire facilmente al microscopio, è completa in meno di due ore. La sostanza filtrata, lavata con poca acqua e seccata su P_2O_5, é stata sottoposta ad ulteriore disidratazione per riscaldamento a temperature opportune nel vuoto.

Per i vari preparati ho determinato i seguenti calori di soluzione riferiti a sostanza anidra (Tab. VI), dai quali ho ricavato i calori di idratazione riportati nell' ultima colonna (Fig. 6).

TABELLA VI.

	cal/gr.	Cal/Mol.	Cal. di idrataz. per Mol.
$3 CaO. Al_2O_3$ sint.	735,1	198,6	—
$12 H_2O$	466,8	126,1	72,5
9,4 »	480,5	129,8	68,3
7,3 »	498,8	134,7	63,9
6 »	519,3	140,3	58,3
2,7 »	612,7	165,5	33,1
1,5 »	640,8	173,1	25,5

Dall'andamento rettilineo del tratto superiore della curva, riferentesi alla forma esagonale, si può dedurre che le molecole di acqua contenute in più di quelle corrispondenti alla formula: $3 CaO. Al_2O_3 . 7,3 H_2O$ producono entrando od uscendo dal complesso idratato effetti termici proporzionali. Ciò lascia supporre che esse abbiano funzione equivalente. Equivalenza simile può essere attribuita alle molecole di acqua contenute nell' idrato cubico.

Gli spettrogrammi DEBYE mostrano chiaramente che i prodotti considerati non sono dei miscugli (Fig. 7). Quelli degli idrati esagonali a: 7,3 — 9,4 — 12 Mol. H_2O sono tra di loro praticamente identici.

Data la facilità con cui l'acqua, entro questi limiti, può essere eliminata e nuovamente riassunta, considerando l' effetto termico relativamente piccolo che essa produce sul calore di idratazione, possiamo ammettere, tenuto conto altresì dell' identità degli spettrogrammi, che l' acqua compresa tra 7,3 e 12 Mol. possegga carattere zeolitico.

La curva di disidratazione in funzione della temperatura mostra per l'alluminato esagonale $3 CaO. Al_2O_3 . 9,5 H_2O$, una brusca eliminazione di acqua a circa 170° con conseguente formazione di esaidrato. In base alla

formula proposta da BRANDENBERGER si dovrebbe ammettere che queste sei molecole di acqua rimanenti siano di costituzione.

L'alluminato cubico esaidrato mostra uno spettrogramma nettamente diverso da quello dei precedenti idrati. Per i suoi prodotti di disidratazione ho osservato degli spettrogrammi simili a quelli della sostanza di partenza, per quanto sempre meno netti, sino a circa 2 Mol. H O.

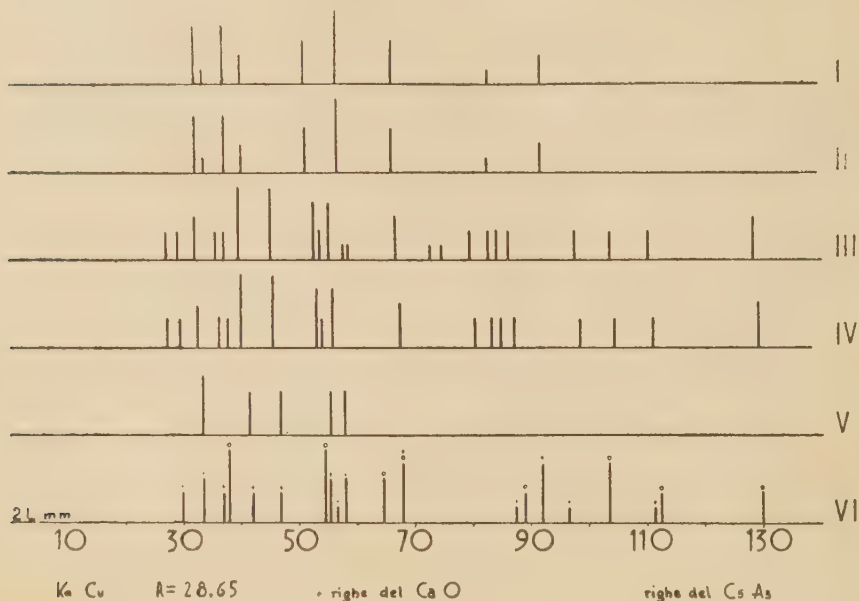



Fig. 7.

1) 3 CaO Al_2O_3. 12 H_2O 2) 3 CaO. Al_2O_3 7,3 H_2O
3) 3 CaO. Al_2O_3. 6 H_2O 4) 3 CaO. Al_2O_3 4,6 H_2O
5) 3 CaO. Al_2O_3 1,5 H_2O 6) 3 CaO. Al_2O_3 6 H_2O dopo riscaldamento a 1000°

KÖBERICH [1]) studiando, a mezzo del tensioeudiometro di HÜTTIG, la disidratazione dell'alluminato tricalcico esaidrato (cubico), ha osservato lo andamento zeolitico della disidratazione stessa, che è reversibile sino ad un contenuto di circa 1,8 Mol. H_2O. L'osservazione röntgenografica ha permesso di stabilire che l'edificio cristallino, pur mantenendosi inalterata la struttura, subisce una diminuzione delle dimensioni reticolari. L'ulteriore disidratazione conduce a prodotti che perdono la loro acqua con grande difficoltà e che non possono riidratarsi nuovamente.

Dall'insieme di queste osservazioni e principalmente dall'equivalenza

[1]) KÖBERICH F., Diss. Univ. Berlin, 1934.

delle sei molecole di acqua, equivalenza che dobbiamo ammettere sulla scorta dei dati calorimetrici, siamo indotti a ritenere che tutte e sei le molecole di acqua contenute in questo idrato debbono essere di costituzione.

Ciò è in accordo con la struttura assegnata all'alluminato tricalcico esaidrato da BRANDENBERGER [1]). Secondo questo autore infatti tutti i gruppi $(OH)^-$ occuperebbero posizioni equivalenti e possederebbero quindi uguali legami.

Che sia possibile la disidratazione profonda di tale alluminato senza che avvengano delle variazioni notevoli di struttura si può spiegare secondo BÜSSEM e EITEL [2]), ammettendo che i gruppi ottaedrici $Al(OH)_6^-$ che sono gli elementi costitutivi principali della cella elementare si trasformino in gruppi tetraedrici $Al(OH)_4^-$ e AlO_4^- con scomparsa del centro di simmetria e con il passaggio di questa da oloedrica in emiedrica.

Il prodotto ottenuto per disidratazione totale sia dell'alluminato cubico sia di quello esagonale accusa un calore di soluzione di 687,2 cal/gr. (185,9 Cal/Mol.), inferiore quindi a quello dell'alluminato tricalcico di partenza. Dallo spettrogramma risulta che esso è costituito da un miscuglio di CaO e di $5\ CaO.\ 3\ Al_2O_3$ [3]) cosa questa già segnalata da THORVALDSON e GRACE [4]) i quali avevano stabilito che la scomposizione avviene quantitativamente secondo la reazione: $3\ (3\ CaO.\ Al_2O_3) = 5\ CaO.\ 3\ Al_2O_3 + 4\ CaO$, in buon accordo con quanto risulta dalle esperienze calorimetriche.

Dai calori di soluzione determinati per l'alluminato tricalcico anidro e per il miscuglio sinterizzato corrispondente al rapporto $CaO/Al_2O_3 = 2$, si calcola per l'alluminato $5\ CaO.\ 3\ Al_2O_3$ un calore di soluzione di 367,0 Cal/Mol. Da questo valore e da quello del calore di soluzione dell'ossido di calcio (47,68 Cal/Mol.) si deduce infatti, in base alla reazione scritta più sopra, un valore di 185,9 Cal., uguale cioè a quello determinato sperimentalmente.

Alluminato bicalcico.

Il numero di molecole di acqua contenute normalmente nell'alluminato bicalcico è di circa 9.

---

[1]) l. c.

[2]) BÜSSEM W. e EITEL W., Zeit. Kristallogr. *95*; 175; (1936).

[3]) Secondo i risultati di recenti ricerche röntgenografiche sembra debba escludersi l'esistenza dell'alluminato $5\ CaO.\ 3\ Al_2O_3$; al suo posto dovrebbe sostituisi un alluminato della composizione: $12\ CaO.\ 7\ Al_2O_3$ (BÜSSEM e EITEL. L. c.) oppure: $9\ CaO.\ 5\ Al_2O_3$ (LAGERGVIST, WALLMARK e WESTGREN. Zeit. anorg. allg. Chem. *234*; 1; (1937)). Dato però che la questione non si può considerare completamente chiarita e che la differenza delle formule ammesse non incide sulla interpretazione dei fatti che vado descrivendo, continuerò a riferirmi alla formula $5\ CaO.\ 3.\ Al_2O_3$.

[4]) THORVALDSON T., GRACE N. S., Can. J. Research. *1*, 36, (1929).

Mylius [1]) ha osservato che per riscaldamento a 105°, o per lungo essiccamento nel vuoto su P_2O_5 di questo idrato, si ottiene un idrato a 5 H_2O molto stabile, il quale posto nuovamente in ambiente umido è capace di riassorbire acqua. Ritiene pertanto che le 5 Mol. di acqua debbono considerarsi di costituzione.

Nacken [2]) ammette che durante il riscaldamento si susseguano gli idrati a 8 — 7 — 6 — 5 — 4 — 3 — 2 — 1 Mol. di acqua; Lefol considera invece possibile l'esistenza degli idrati a 9 — 8 — 6 — 5 — 1 Mol. di acqua.

Secondo Salmoni [3]) in ambiente a grado igrometrico elevato dovrebbe formarsi un idrato a 11 H_2O mentre per riscaldamento del pentaidrato si dovrebbero formare gli idrati a 3 e 1 Mol. H_2O.

Nella curva perdita di peso-temperatura di un idrato contenente circa 9 Mol. H_2O ho notato degli arresti in corrispondenza degli idrati a 6 — 5 — 1 Mol. H_2O. (Fig. 5).

Ho preparato questo sale idratando il prodotto sinterizzato ottenuto per cottura a circa 1350° di un miscuglio calcolato di Al_2O_3 e $CaCO_3$.

L' alluminato bicalcico anidro non compare sul diagramma Rankin e il prodotto corrispondente deve pertanto essere considerato come un miscuglio di alluminato tricalcico e di trialluminato pentacalcico.

Il prodotto idrato ottenuto era identico al sale preparato per precipitazione della soluzione di alluminato di potassio con acqua di calce, secondo le indicazioni di Mylius.

Seccato su $CaCl_2$ e posto poi per lungo tempo in presenza della soluzione satura di nitrato di piombo, ha fornito una percentuale di acqua corrispondente a 8,8 H_2O. Per essicamento su P_2O_5 ho ottenuto il pentaidrato e da questo per riscaldamento a temperature opportune, nel vuoto, gli altri idrati di cui quì sotto riporto i calori di soluzione e di idratazione riferiti al prodotto anidro (Tab. VII).

Tabella VII.

	cal/gr.	Cal/Mol.	Cal. di idrataz. per Mol.
2 CaO. Al_2O_3 sint.	660,6	141,4	—
8,8 H_2O	456,0	97,6	43,8
7,2 »	481,7	103,1	38,3
5 »	508,5	108,9	32,5
3,8 »	538,0	115,2	26,2
1 »	626,0	134,0	7,4
0,63 »	640,0	137,0	4,4

[2]) L. c.

[3]) L. c.

[4]) L. c.

Con i calori di idratazione riportati nell' ultima colonna è stata tracciata la curva riportata in Fig. 6. Essa è costituita di due tratti rettilinei che mostrano una netta deviazione di direzione in corrispondenza del pentaidrato.

Ciò permette di asserire che esiste una differenza di legame tra le prime cinque molecole di acqua e quelle trattenute ulteriormente, e che nei due differenti tratti di curva le molecole hanno probabilmente funzioni tra di loro equivalenti.

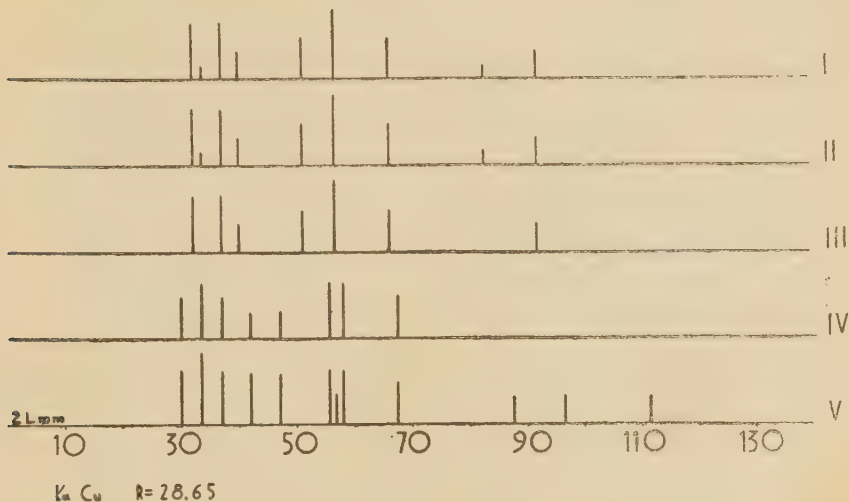



Fig. 8.

1) $2\,CaO.\ Al_2O_3.\ 8{,}8\ H_2O$
2) $CaO.\ Al_2O_3.\ 5\ H_2O$
3) $2\,CaO.\ Al_2O_3.\ 3{,}8\ H_3O$
4) $2\,CaO.\ Al_2O_3.\ 0{,}6\ H_2O$
5) $5\ CaO.\ 3\ Al_2O_3$

Notevole è inoltre il fatto che anche in questo caso il prodotto ottenuto per disidratazione totale (a circa 1000°) presenta come nel caso dell' alluminato tricalcico, un calore di soluzione diverso da quello accusato dalla sostanza di partenza. Esso è risultato infatti di 647,0 cal / gr. (138,5 Cal / Mol.).

Gli spettrogrammi Debye degli idrati con 3,8 — 5 — 7,2 — 8,8 Mol. H_2O sono molto simili tra di loro (Fig. 8); quello dell' idrato a 1 H_2O è poco preciso, ma insieme con quello dell' idrato con 0,6 H_2O appare simile a quello del prodotto ottenuto per disidratazione totale.

In quest' ultimo sono chiaramente visibili le righe dell' alluminato; $5\,CaO.\ 3\ Al_2O_3$ mentre le righe dell' alluminato tricalcico, molto nette nel predotto sinterizzato di partenza, sono del tutto scomparse (Fig. 9).

Il saggio White permette di stabilire che per quantitativi di acqua inferiori a 1 Mol., il prodotto si scompone con messa in libertà di calce.

In base ai dati calorimetrici possiamo schematicamente ammettere che l'alluminato tricalcico che si dovrebbe formare a seguito dell' eliminazione completa dell'acqua, si scompone in trialluminato pentacalcico e calce.

Secondo tale schema di scomposizione si calcola dai calori di soluzione del 5 CaO. 3 Al_2O_3 e del CaO, un valore di 138,3 Cal., valore molto vicino a quello determinato sperimentalmente per la sostanza ottenuta per disidratazione a 1000°.

È da notare che data la temperatura elevata e la durata del riscaldamento rese necessarie dalla difficoltà con cui l'acqua si elimina completamente da questi idrati, è possibile una parziale ricombinazione dell'ossido di calcio.

Dall' insieme delle osservazioni di cui sopra deduciamo che sussiste una notevole anologia di comportamento fra l' alluminato tricalcico esaidrato e l' alluminato bicalcico pentaidrato, e possiamo quindi, anche per quest'ultimo, ammettere che le 5 Mol. H_2O siano di costituzione. L'acqua trattenuta in eccesso avrebbe pertanto carattere zeolitico.

Alluminato tetracalcico.

L'alluminato tetracalcico mostra un contenuto massimo di acqua variabile tra 12 e 14 Mol. H_2O. Anche per questo alluminato è stato osservato che mentre un certo numero di molecole di acqua può essere facilmente perduto, altre sono invece trattenute più tenacemente.

Forsen [1]) e Mylius [2]) ritengono che solo 7 Mol. debbono essere considerate di costituzione. Mylius, per riscaldamento di molte ore a 105°-115°, in presenza di calce, ottiene però un idrato con una percentuale di acqua alquanto superiore a quella calcolata per l' eptaidrato.

Lefol [3]) ammette che solo 6 Mol. H_2O siano di costituzione e ritiene possibile la formazione degli idrati superiori: a 7 — 8 — 11 — 12 Mol. H_2O.

Esaminando un idrato con 14 Mol. di acqua a mezzo del tensioeudiometro di Hüttig, Nacken [4]) ha ottenuto degli arresti nella curva di disidratazione isobara in corrispondenza degli idrati a 14 — 12 — 10 — 9 — 7 — 5 — 3 Mol. H_2O.

Dalla curva di disidratazione termica (Fig. 5) ho potuto osservare che l' eliminazione dell' acqua dagli idrati a 12 - 13 Mol. H_2O avviene con lentezza fino a una temperatura di circa 100°. A partire da questa la perdita di peso diviene rapida; un punto di flesso non molto definito si nota in

---

[1]) L. c.

[2]) L. c.

[3]) L. c.

[4]) L. c.

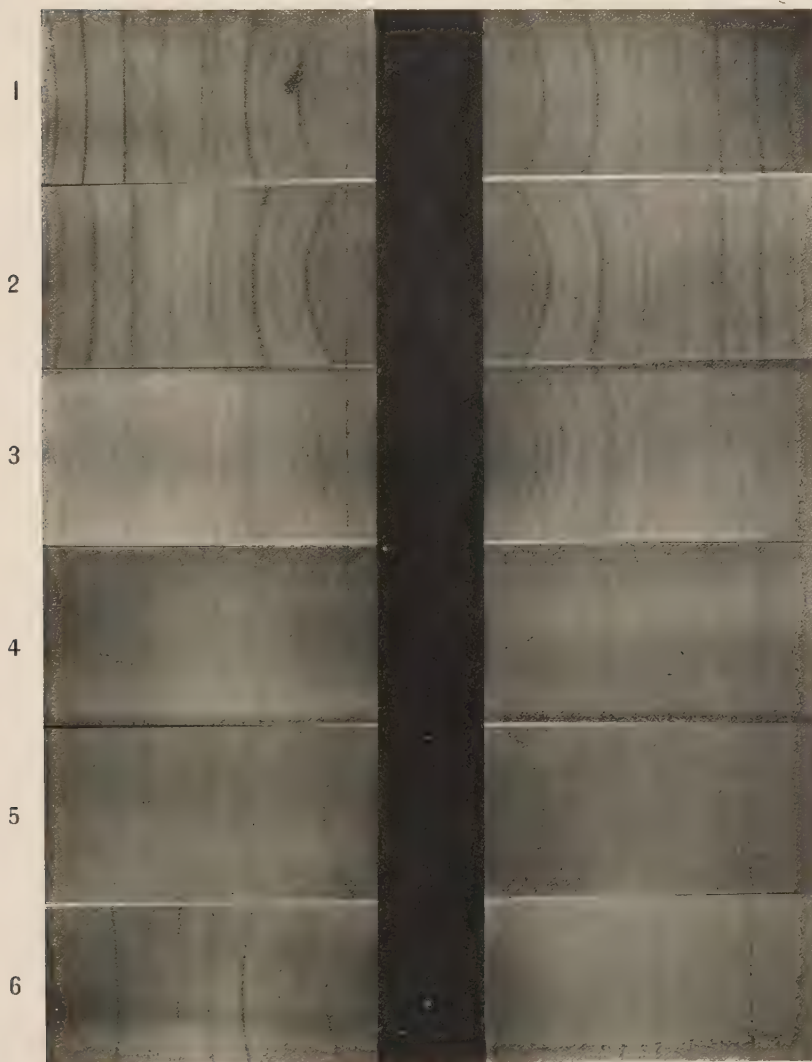



Fig. 9.

1) $3\ CaO.\ Al_2O_3$ 2) $2\ CaO.\ Al_2O_3$ sinterizzato

3) $5\ CaO.\ 3\ Al_2O_3$ 4) $2\ CaO.\ Al_2O_3\ 5\ H_2O$ dopo riscaldamento a 1000°

5) $4\ CaO.\ Al_2O_3.\ 8\ H_2O$ dopo riscaldamento a 1000° 6) CaO

corrispondenza di un idrato a 7-8 Mol. H_2O. Questo perde a sua volta rapidamente acqua fino ad un contenuto di circa 4 Mol. H_2O.

Ho ottenuto facilmente il sale precipitando la soluzione di alluminato monocalcico con forte eccesso di acqua di calce. Un prodotto identico l'ho ottenuto ponendo ad idratare in acqua di calce ghiacciata il miscuglio calcolato di alluminato tricalcico e ossido di calcio.

Il prodotto seccato su $CaCl_2$ e posto in presenza della soluzione satura $Pb(NO_3)_2$, ha accusato una percentuale di acqua corrispondente a 12,8 Mol. H_2O.

Per essiccamento durato vari giorni su P_2O_5 nel vuoto, ho ottenuto un idrato con 8 Mol. H_2O. I calori di soluzione e di idratazione osservati per i vari idrati sono riportati nella Tab. VIII.

L'alluminato tetracalcico anidro deve essere considerato come un miscuglio di ossido di calcio e alluminato tricalcico.

TABELLA VIII.

	cal/gr.	Cal/Mol.	Cal. di idrataz. per Mol.
$3\,CaO.\,Al_2O_3 + CaO$	—	246,28	—
$4\,CaO.\,Al_2O_3.\;12{,}8\;H_2O$	472,0	154,0	92,28
11 »	487,0	158,9	87,38
9,5 »	497,0	162,1	84,18
8 »	508,2	165,8	80,48
4,9 »	587,4	191.6	54,68
2,5 »	645,3	210,5	35,78

La curva dei calori d'idratazione è analoga a quella ottenuta per l'alluminato bicalcico (Fig. 6).

Dagli spettrogrammi DEBYE (Fig. 10) si osserva che il reticolo dell'idrato a 12,8 Mol. H_2O viene mantenuto fino ad un contenuto di acqua di 4 — 5 Mol. H_2O. Per i prodotti a minore contenuto di acqua si notano degli spettri che mostrano dapprima debolmente, ma poi — con il procedere della disidratazione — sempre più nettamente, le righe ottenute dal prodotto preparato per disidratazione totale a circa 1000°.

Questo è costituito da un miscuglio di ossido di calcio e trialluminato pentacalcico (Fig. 9); per esso ho determinato un calore di soluzione diverso da quello calcolato per il miscuglio di alluminato tricalcico e ossido di calcio e precisamente: 713,1 cal/gr. (232,6 Cal/Mol.).

Nella totale disidratazione l'alluminato tricalcico che si dovrebbe formare si decompone in ossido di calcio e trialluminato pentacalcico. Il calore di soluzione che si può calcolare per il miscuglio è di: 233,6 Cal. e

quindi abbastanza vicino, considerando anche la possibilità di ricombinazione dell'ossido di calcio, a quello determinato sperimentalmente.

In base alla curva dei calori di idratazione mi sembra lecito di asserire che le prime 8 Mol. di acqua sono di costituziore e le successive di natura zeolitica.

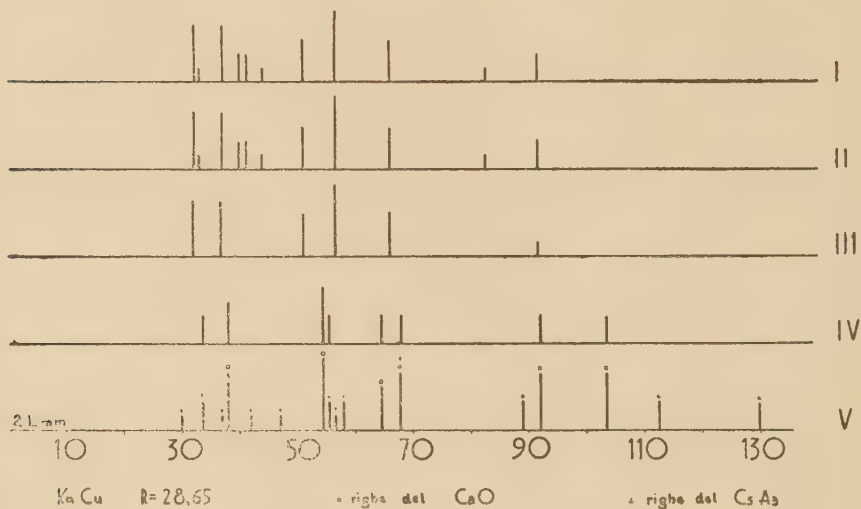



Fig. 10.

1) $4\,CaO.\ Al_2O_3.\ 12{,}8\,H_2O$ 2) $4\,CaO.\ Al_2O_3.\ 8\,H_2O$

3) $4\,CaO.\ Al_2O_3.\ 4{,}9\,H_2O$ 4) $4\,CaO.\ Al_2O_3.\ 2{,}5\,H_2O$

5) $4\,CaO.\ Al_2O_3.\ 8\,H_2O$ dopo riscaldamento a 1000°

Faccio rilevare tuttavia che la formula di costituzione con 8 Mol. di acqua è in contrasto con le teorie di Forsen e di Brandenberger sulla costituzione degli alluminati di calcio idrati.

La spiegazione si può forse trovare ammettendo che l'ottava molecola di acqua sia di natura zeolitica ma, essendo trattenuta molto più tenacemente delle precedenti, produca un effetto termico maggiore.

I fenomeni osservati pongono in rilievo una spiccata analogia fra i vari alluminati, sia per le caratteristiche röntgenografiche dei preparati di abito esagonale, sia per l'assieme del comportamento nella disidratazione.

È da rilevare che il parallelismo fra le linee (Fig. 6) che rappresentano l'andameuto dei calori di idratazione per gli alluminati: bi, tri, e tetracalcico, più fortemente idratati, indicando effetti termici di idratazione all'incirca uguali, conferma ii carattere zeolitico dell'acqua trattenuta in questi idrati superiori.

Da notare infine che i calori di soluzione determinati sperimental-

mente per gli idrati superiori degli alluminati tricalcico e tetracalcico, sono vicini, per quanto leggermente inferiori, a quelli che si calcolano ammettendo essere detti alluminati dei miscugli di alluminato bicalcico e una o due Mol. $Ca(OH)_2$ rispettivamente, oppure di alluminato tricalcico e una Mol. $Ca(OH)_2$.

Ciò mi sembra che possa esser posto in relazione con la struttura ammessa da Brandenberger per questi sali.

Azione del vapore d'acqua nell'assorbimento della radiazione solare

Memoria del prof. **Giuseppe Imbò**

(presentata dal socio A. Carrelli nell'adunanza del dì 11 novembre 1939 - XVIII per l'inserzione nel vol. I, serie 3ª, degli Atti)

Sunto. — Si prende in esame il problema della riduzione delle osservazioni di radiazione solare globale alle condizioni ideali di un'atmosfera asciutta. La soluzione del detto problema esige la conoscenza degli spessori di vapore attraversati dai raggi solari e del coefficiente d'assorbimento complessivo (diffusivo e selettivo) del vapore per i vari spessori. Nella prima parte si deducono teoricamente le formule da applicare per il calcolo degli spessori di vapore: verticale ed obliquo, in base alla conoscenza della tensione del vapore e della temperatura per una stazione non necessariamente corrispondente a quella di osservazione. Si danno inoltre apposite tavole che agevolano i calcoli. Nella seconda parte si discutono le osservazioni eseguite all'Istituto di Fisica Terrestre nel decennio 1907-1916 con lo scopo di determinare appunto i ricercati coefficienti d'assorbimento. Viene innanzitutto dimostrato, ed in modo evidente, che le condizioni generali dell'intorbidamento dell'aria (non attribuibile però al vapore d'acqua) variano con andamento conforme a quello delle condizioni di umidità. Le ricerche eseguite danno inoltre la possibilità di eliminare totalmente dalle osservazioni l'influenza dell'intorbidamento. Opportune considerazioni lasciano poi dedurre la concordanza tra i valori dei fattori di trasmissione ottenuti dall'A. e quelli del Kimball nel medesimo campo di variazione degli spessori di vapore. Il detto accordo offre infine la possibilità e quindi il vantaggio di poter utilizzare i valori deducibili dalle curve del Kimball per spessori di vapore maggiori di quelli consentiti dalle osservazioni eseguite a Napoli, e precisamente fino al valore di 16 cm.

Statistica degli aggregati in una collettività e concentrazione rispetto a due caratteri

Nota del socio corr. **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 13 gennaio 1940 - XVIII)

Sunto. — Un' analisi del concetto di concentrazione statistica e dei tipi di carattere conduce ad ampliare alcune definizioni statistiche; permettendo così l'inizio di ricerche su collettività di individui di II ordine.

1. *Richiami di generalità*

Le ben note definizioni di «frequenza, graduazione, concentrazione» riferite al modo di distribuzione di *un* carattere in una collettività si possono agevolmente estendere; e questo fra l'altro col considerare *due* caratteri e collo studiare come uno di essi risulta distribuito rispetto alle modalità dell'altro, in quella collettività in esame.

In base a essa ci sarà possibile parlare e calcolare la mutua concentrazione di un carattere rispetto ad un altro in una collettività; così ad esempio considerando come individui le coppie matrimoniali, si potrà considerare come primo carattere l'età dello sposo e come secondo quello della sposa; ritornando così, da un'altro punto di vista, all'esame della omogamia rispetto a classi di età.

Certo, vi sono dei rapporti fra quanto esamineremo qui, e quanto abbiamo già esaminato trattando (in questi Rendiconti, negli ultimi anni) di omogamia; ma questo è uno studio da seguire in ulteriori sviluppi.

È bene premettere, per la chiara comprensione dei procedimenti che seguiremo, una distinzione fra i tipi di "caratteri„ presi statisticamente in esame. Partiremo da concetti già ben noti riportandoli ad un nuova fondamentale concezione.

Anzitutto, come è noto, un carattere può avere nella sua definizione aspetto di variabile o di mutabile. Nel secondo caso si può semplicemente affermare se due individui presentino o no modalità differenti del carattere; ad esempio «luogo di nascita» «data di nascita» «religione» etc; nel primo invece del carattere si può misurare numericamente la modalità (altezza, peso etc.).

Tuttavia agli effetti di quanto dovremo sviluppare è necessaria, fra i caratteri con aspetto di variabile, una ulteriore distinzione; essa corrisponde alla misura numerica pensata come qualità (del carattere) o come livello (del carattere). Così un'altezza può essere pensata sotto l'uno o

l'altro aspetto; una temperatura solo sotto il secondo; il tempo sotto il primo aspetto, in quanto durata o sotto il secondo, in quanto data del calendario. E così via.

È bene dichiarare, subito, la sostanziale aderenza fra il nostro punto di vista e quello del GINI:, si veda il suo recente libro « Memorie di Metodologia Statistica » Vol. I (Variabilità e Concentrazione) Editrice Giuffrè — Milano 1939. Esso riproduce precedenti ricerche dell' A.

In sostanza, pur attraverso una concezione nostra ed in gran parte nuova, noi ci muoviamo in queste (e nelle precedenti nostre ricerche) in un ordine di idee analogo a quello del Gini.

I caratteri, misurati da variabili caratterizzanti una "quantità„ li diremo *accumulabili:* infatti si può misurare in via diretta la quantità globale posseduta, di quel carattere, da una collettività, sommando le quantità possedute dai suoi elementi.

Invece i caratteri misurati da livelli li diremo *non accumulabili*; si può solo per via indiretta caratterizzare un livello globale posseduto da una collettività (così per le temperature si può ricorrere alle quantità di calore, attraverso il calore specifico).

A sua volta un carattere mutabile può essere di due tipi: o fra le sue modalità si può stabilire un ordinamento di precedenza, dicendo quand'è che una modalità è più forte (maggiore) di un'altra; oppure ciò può mancare del tutto.

Nel primo caso è possibile attribuire, convenzionalmente, al carattere una misura ξ: risultando egualmente giustificate *tutte* le infinite altre scelte di altre misure caratterizzate da $f(\xi)$ con f funzione monotona; nel secondo ciò invece non è possibile. (ad es: luogo di nascita).

Il primo caso dunque forma, in certo senso, il passaggio dal concetto di mutabile a quello di variabile.

Come base di ulteriori sviluppi, dovremo poi caratterizzare il concetto di "uniforme distribuzione„.

Nel caso di caratteri accumulabili è tacitamente inteso che questa uniformità è data dalla presenza in ogni individuo, di una eguale quantità del carattere: è il carattere che risulta uniformemente distribuito fra gli individui della collettività.

Nel caso di caratteri non accumulabili, oppure mutabili, è abitualmente inteso che questa uniformità è invece data dalla presenza di un egual numero di individui per ogni modalità del carattere. (o per ogni classe).

È chiaro che le due cose sono in netto contrasto fra loro: nel primo caso vi è uniformità del carattere fra gli individui; nel secondo uniformità degli individui fra le modalità.

Quindi, per intenderci, la prima accezione sarà detta: *isotipica-uniforme* o indifferente per gli individui; la seconda accezione invece: *equidensa* o indifferente per il carattere.

Per essere più precisi, se vi è la distribuzione isotipica e vi sono le classi $H_0, H_1, \ldots H_n$ corrispondenti alle modalità h comprese fra i valori h_0 ed h_1 (esclusa), h_1 ed h_2 (esclusa), . . . , al disopra di h_n, allora *tutti* gli individui appartengono ad una stessa classe H_r, se invece vi è distribuzione equidensa, vi saranno ν_0 individui nella prima, ν_1 nella seconda,... ν_n nell'ultima, con

$$\nu_0 \;:\; \nu_1 \;:\; \nu_2 : \ldots = h_1 - h_0 \;:\; h_2 - h_1 \;:\; h_3 - h_2 \ldots$$

se il carattere è variabile del tipo « livello » non accumulabile (sicchè ad ogni grado di livello corrisponde lo stesso numero di individui); oppure da

$$\nu_0 = \nu_1 = \nu_2 = \ldots$$

se il carattere è mutabile (oppure da $\nu_0 : \nu_1 : \nu_2 : \ldots \; \lambda_0 : \lambda_1 : \lambda_2 : \ldots$ secondo una certa convenzione che a sua volta può dipendere da variabile — quantità o variabile — livello connessa convenzionalmente a quel carattere mutabile).

Naturalmente, come vi è uniformità, vi può essere difformità e concentrazione. Nella prima accezione la difformità si riferisce al carattere, nella seconda agli individui.

Quanto sopra si riferisce al confronto di caratteri accumulabili: anche il numero di individui è di tale tipo.

Se invece si tratta di carattere non accumulabile o addirittura di carattere mutabile, la prima accezione (quella isotipica) perde significato e resta solo la seconda. (Anche quì dobbiamo richiamare il Gini).

Così non potremo parlare di distribuzione isotipica uniforme per appartenenza a certe regioni geografiche, ma soltanto di distribuzione equidensa (o in numero assoluto, o proporzionalmente alla superficie, o proporzionalmente alla popolazione come abbiamo poc'anzi detto).

2. *Premesse sulla frequenza, graduazione, concentrazione.* Consideriamo ora soltanto un carattere (variabile — quantità) e gli individui di una collettività K.

La curva di distribuzione [1]) o semplicemente la distribuzione di un carattere fra gli individui è dato da

$$\left\{ \begin{matrix} H_0 \;, & H_1 \;, & H_2 \;, \ldots \\ n_0 \;, & n_1 \;, & n_2 \;, \ldots \end{matrix} \right\} \qquad (F)$$

essendo H_r le classi di modalità del carattere, n_r il numero degli apparte-

[1]) Tratteremo qui — pur usando la terminologia del continuo — quasi sempre il caso discreto: il passaggio al continuo è semplice e conduce a sostituire alle sommatorie integrali: in prevalenza quelli di Stieltjes.

nenti a questa classe, cioè degli individui che presentano modalità comprese in H_r. Convenzionalmente la classe H_r può essere rappresentata da una media h^*_r delle sue modalità: ad esempio h_r; oppure h_{r+1}; oppure ancora $\frac{1}{2}(h_r+h_{r+1})$ etc. se la classe è (h_r, h_{r+1}).

La curva delle n, è la curva di *frequenza* degli individui.

Conviene esaminare, a fianco della F, la curva di «carico»: essa ci dice (ricordando che il carattere H è accumulabile) quanto è ricca la classe H_r, di tale carattere: avremo dunque

$$\left\{ \begin{array}{llll} H_0 & , H_1 & , H_2 & , \ldots \\ n_0 h^*_0 & , n_1 h^*_1 & , n_2 h^*_2 & , \ldots \end{array} \right\} \qquad (C)$$

per ovvie considerazioni, come frequenza del carico.

Qui si presenta la concezione nuova che e il fatto fondamentale per noi: la modalità h del carattere accumulabile si considera dovuta precisamente alla presenza di $h.U$ elementi del carattere in un individuo della collettività K: Sicchè questo va considerato precisamente come un «portatore» di $h.U$ individui della collettività dei caratteri.

Sicché, per noi vi è una collettività K di individui, ciascuno costituito a sua volta da una collezione di altri elementi-individui ciascuno recante un «unità» del carattere H; e quindi K va considerata come un aggregato di aggregati di unità H. Restano così delineati per altra via i significati di graduazione etc. Il «*carico*» è il numero di elementi H presenti.

La «graduazione» si ottiene numerando gli individui, e quindi assegnando ad ognuno di essi la classe corrispondente (meglio il valore numerico che rappresenta la modalità media della classe) con opportuna disposizione degli individui stessi; sicchè quelli di una classe precedente siano considerati prima di quelli di una classe seguente: cioè formando la «distribuzione»

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} H_0 & , H_0 & , \ldots & , H_0 & H_1 & , \ldots & , H_1 & , \ldots \\ \mathrm{I} & , \mathrm{II} & , \ldots & , n_0^{mo} & , (n_0+1)^{no} & , \ldots & , (n_0+n_1)^{mo} & , \ldots \end{array} \right\} \qquad (\Phi)$$

Considerando ora tutti gli individui aventi modalità minore o eguale a quella della classe r— sima, si ha la “graduazione„ cioè

$$\left\{ \begin{array}{llll} H_0 & , H_1 & , \ldots , H_2 & , \ldots \\ n_0 & , n_0+n_1 & , \ldots , n_0+n_1+\ldots+n_2 & , \ldots \end{array} \right\} \qquad (G)$$

La distribuzione del carico si forma analogamente a quella degli individui ed è:

$$\left\{ \begin{matrix} H_0 \,, & H_0 \,, & \ldots \,, & H_0 \,, & \ldots \\ \mathrm{I} \,, & \mathrm{II} \,, & & ,\, (h^*_0 n_0) - mo & \ldots \end{matrix} \right\}$$

e da essa si ottiene la "graduazione del carico„ cioè

$$\left\{ \begin{matrix} H_0 \,, & H_1 & , \ldots \\ h_0 n_0 \,, & h_0 n_0 + h_1 n_1 & , \ldots \end{matrix} \right\} \qquad (\Gamma)$$

Ponendo infine in corrispondenza — per le stesse classi — la graduazione degli elementi e la graduazione del carico si ha la "concentrazione„ cioè

$$\left\{ \begin{matrix} n_0 \,, & n_0 + n_1 & n_0 + n_1 + n_2 & , \ldots \\ h_0 n_0 \,, & h_0 n_0 + h_1 n_1 \,, & h_0 n_0 + h_1 n_1 + h_2 n_2 & , \ldots \end{matrix} \right\} \qquad (R)$$

Tali curve si riducono a percentuali per comodità e per uniformità di calcolo; sicchè si riferiscono a campi di variabilità fra (0,1) e questo, tanto per il numero di individui — formandone i rapporti di N_r al totale degli individui stessi — quanto per il carattere, quanto per il carico.

In tal modo, in collettività molto numerose e con classi di carattere molto numerose a loro volta e contenenti molti individui, conviene far passaggio alla variabile continua.

Se si passa alle variabili continue, caratterizziamo con η il carattere, con ν la percentuale di individui, con θ quella del carico

$$\eta = \frac{h_r}{h_{max}} \quad ; \quad \nu = \frac{n_r}{n} \quad ; \quad \theta = \frac{h_r n_r}{N} \quad ; \quad n = \Sigma n_r \quad ; \quad N = \Sigma h_r n_r \quad ;$$

sicchè risulti:

$$0 \leqq \eta \,,\, \nu \,,\, \theta \leqq 1$$

mentre

$$\int_0^1 \nu(\eta) d\eta = 1 \quad ; \quad \int_0^1 \theta(\eta) d\eta = 1.$$

Vi è talvolta convenienza ad utilizzare integrali di Stieltjes, trasformando acconciamente le formule e le definizioni. Queste, sono ora, per riduzione a percentuali:

$$\left\{ \begin{matrix} \eta_0 \,, & \eta_1 \,, & \ldots \\ \nu_0 \,, & \nu_1 \,, & \ldots \end{matrix} \right\} \quad ; \quad \left\{ \begin{matrix} \eta_0 \,, & \eta_1 \,, & \ldots \\ \theta_0 \,, & \theta_1 \,, & \ldots \end{matrix} \right\}$$

come frequenze di elementi e di carico;

$$\begin{Bmatrix} \eta_0 & , & \nu_0+\nu_1 & , & \nu_0+\nu_1+\nu_2 & , & \dots \\ \theta_0 & , & \theta_0+\theta_1 & , & \theta_0+\theta_1+\theta_2 & , & \dots \end{Bmatrix}$$

come graduazione.

Per variabili continue, la curva di graduazione ha le sue ordinate (ξ, ζ) date da

$$\xi(\eta) = \int_0^\eta \nu(s)ds \quad ; \quad \zeta(\eta) = \int_0^\eta \theta(s)ds = \int_0^\eta s \cdot \nu(s)ds$$

sicchè la curva di graduazione [1]) risulta data parametricamente in funzione della η, modalità del carattere in esame.

È bene osservare che, data la definizione delle ν, η, la curva di concentrazione (o poligonale nel caso discontinuo) è sempre al di sotto della bisettrice degli assi, essendo $\xi(\eta) < \eta$; $\zeta(\eta) < \xi(\eta)$.

Il rapporto di concentrazione R legato a tale curva, compiute le ben note riduzioni, si riduce al rapporto fra l'area racchiusa da essa curva e dalla bisettrice, e la semiarea del quadrato: vale O per distribuzione uniforme, 1 per concentrazione in una sola classe, ed è in definitiva dato da

$$R = 1 - 2\int_0^1 \zeta(\eta) d\xi(\eta) = 1 - 2\int_0^1 d\sigma\left(\nu(\sigma) \cdot \int_0^\sigma s \cdot \nu(s)ds\right)$$

3. *Collettività somma di due altre*; *indice misto di concentrazione (di due collettività).*

Conviene, come vedremo subito, considerare la curva di concentrazione come una curva quotata; cioè segnare su ogni suo punto il valore h (e η, nel caso percentuale) che vi corrisponde.

Sieno assegnate due collettività K', K'' le quali sono distribuite secondo un certo carattere H, e si riuniscono a formarne una terza complessiva K, ad elementi ancora distribuiti secondo H.

Sia n', n'', $n = n' + n''$ il numero degli individui della prima, seconda, terza collettività; ed N', N'', $N' + N''$ i carichi globali rispettivi del carattere H da essi posseduti; e poniamo:

$$0 \leq \left(\alpha' = \frac{n'}{n'+n''} \; ; \; \alpha'' = \frac{n''}{n'+n''}\right) \leq 1 \; ; \; 0 \leq \left(A' = \frac{N'}{N'+N''} \; ; \; A'' = \frac{N''}{N'+N''}\right) \leq 1 .$$

---

[1]) Può esistere direttamente ed essere continua questa, essendo invece discontinue quelle di frequenza, come è ben noto.

Risulta

$$\nu_r = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}{n} = \frac{(n'_1 + \ldots + n'_r)}{n} + \frac{(n''_1 + \ldots + n''_r)}{n}$$

$$\Theta_r = \frac{h_1 n_1 + \ldots + h_r n_r}{N} = \frac{(h_1 n'_1 + \ldots + h_r n'_r) + (h_1 n''_1 + \ldots + h''_r n_r)}{N}$$

e quindi

$$\nu_r = \frac{(n'_1 + \ldots + n'_r)}{n'} . \alpha' + \frac{(n''_1 + \ldots + n''_r)}{n''} \alpha'' = \alpha' \nu'_r + \alpha'' \nu''_r$$

$$\Theta_r = \frac{(n'_1 h_1 + \ldots + n'_r h_r)}{N'} A' + \frac{(n''_1 h_1 + \ldots + n''_r h_r)}{N''} A'' = A' \Theta'_r + A'' \nu'' \Theta''_r.$$

Supponiamo dapprima che l'ammontare del carattere posseduto totalmente da ogni collettività sia proporzionale al numero degli elementi della collettività stessa, oppure che ciò si verifichi almeno per quelle collettività in esame. Risulta allora $\alpha = A$; $\beta = B$.

In tal caso, tracciate le due curve di concentrazione Γ' e Γ'' relative a K' e K'', la curva Γ si ottiene con l'effettuare le seguenti operazioni :

I. Scegliere su ognuna delle due curve *quotate*, un punto corrispondente allo stesso valore h del parametro-modalità del carattere: siano essi P', P''.

II. Congiungere P' con P''.

III. Fissare sul segmento $P' P''$ un punto P che lo divida nel rapporto α, β

Ne consegue che *tutte* le collettività K ottenute riunendo una collettività multipla della prima K' (parallela, secondo il Gini) ed una multipla della seconda K'', danno curve di concentrazione soddisfacenti a questa costruzione.

In quanto all'indice R, riesce agevole verificare che esso dipenderà quadraticamente da α, β e linearmente da R', R'' ; perchè vale la formula

$$S = \alpha'^2 S' + \alpha' \beta'' S^{(1,2)} + \alpha'' \beta' S^{(2,1)} + \alpha''^2 S''$$

e quindi — con ovvi passaggi —

$$R = \alpha'^2 R' + \alpha' \beta'' R^{(1,2)} + \alpha'' \beta' R^{(2,1)} + \alpha'^2 R''$$

Come si vede si introduce un indice misto relativo alle due collettività : esso è $R^{(1,2)}$

Per calcolarlo, osserviamo subito che esso deriva da una formazione analoga all' area, ma ottenuta collegando in croce le due seriazioni ; cioè le $S^{(1,2)}$, $S^{(2,1)}$ sono in sostanza ottenute dal calcolo delle due aree corrispondenti alle distribuzioni fittizie :

$$\left\{ \begin{matrix} \nu'_1 & , & \nu'_1 + \nu'_1 & , & \dots \\ \theta''_1 & , & \theta''_1 + \theta''_2 & , & \dots \end{matrix} \right\} \quad , \quad \left\{ \begin{matrix} \nu''_1 & , & \nu''_1 + \nu''_2 & , & \dots \\ \theta''_1 & , & \theta'_1 + \theta''_2 & , & \dots \end{matrix} \right\}$$

Nel caso di più collettività K', K'', ... $K^{(\rho)}$ da sommare assieme per avere la K, sussistono le seguenti costruzioni per la curva di concentrazione totale:

I. Si costruiscano su ogni curva quotata i punti P', P'', ... $P^{(\rho)}$ corrispondenti allo stesso valore h del parametro.

II. Si costruisca il baricentro P delle masse (a somma unitaria) α', α'', ... $\alpha^{(\rho)}$ depositate ordinatamente in quei punti.

Il luogo di P è la curva quotata della concentrazione relativa a K.

In quanto all' indice di concentrazione R esso è dato da

$$R = \sum \left\{ \alpha^{(i)} \alpha^{(j)} \right\} R^{(i,j)} + \sum \left\{ \alpha^{(i)} \right\}^2 R^{(i)}$$

cioè da una forma quadratica definita positiva nelle α, lineare nelle $R^{(i)}$, $R^{(i,j)}$ e calcolabile sempre che si conoscano

I. Gli indici puri di concentrazione, di ogni collettività;

II. Gli indici misti di concentrazione, di ogni coppia di collettività.

Abbandoniamo ora l'ipotesi che le collettività in esame sieno isobariche rispetto al carattere.

Riesce agevole constatare che allora lo schema dato non permette più di giungere alla costruzione baricentrica indicata poc' anzi.

Per l' indice R sussiste una formula analoga a quella del caso isobarico; essa per due collettività riunite è:

$$R = \alpha' A' R' + \alpha' A'' R^{(1,2)} + \alpha'' A' R^{(2,1)} + \alpha'' A'' R'';$$

ed è lineare nelle R, lineare nelle α, lineare nelle A, bilineare nel complesso di queste.

E dunque in generale

$$R = \sum \alpha^{(i)} A^{(j)} R^{(i,j)}$$

convenendo che $R^{(i,j)} = R^{(i)}$ se $i = j$.

La costruzione della curva Γ si effettuerà sempre in modo baricentrico; ma con i coefficienti α nelle proiezioni su di un asse, con i coefficienti A nelle proiezioni sull' altro.

4. *Concentrazione di aggregati; concentrazione mutua di due caratteri.*

Con queste premesse passiamo a dare appunto due applicazioni diverse della concentrazione.

Per la prima, si tratta di caratterizzare (in altro modo che non con la media, come si sono costituiti aggregati di elementi in seno ad una collettività.

Sia dunque una collettività K ed in seno ad essa si siano formati aggruppamenti di $1, 2, 3, \ldots n$ *elementi* (individui di I ordine) a formare *famiglie* (individui di II ordine)

Vi saranno dunque

$$\begin{cases} \text{famiglie di:} & 1 \;,\; 2 \;,\; 3 \;, \ldots \; n \quad \text{componenti} \\ \text{in numero di:} & \nu_1 \;,\; \nu_2 \;,\; \nu_3 \;, \ldots \; \nu_n \end{cases}$$

In questa distribuzione, abitualmente, si considera il numero medio di componenti, cioè

$$\nu^* = \frac{1 \cdot \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \ldots + n\nu_n}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_n} .$$

Invece noi considereremo la «concentrazione»; assumiamo il numero di componenti come modalità del carattere «composizione dell'aggregato» e quindi come carico precisamente il prodotto di esso per il numero degli aggregati.

In tal modo si ha la curva di concentrazione dovuta a

$$\begin{Bmatrix} \nu_1 \;,\; \nu_1 + \nu_2 \;,\; \nu_1 + \nu_2 + \nu_3 \;,\; \ldots \\ \nu_1 \;,\; \nu_1 + 2\nu_1 \;,\; \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 \;,\; \ldots \end{Bmatrix}$$

Se vi è così la possibilità di descrivere completamente una collettività complessa. In seno ad essa si formano oltre gli elementi di primo ordine — anche loro aggregati, elementi di secondo ordine; con questi (ad eventualmente con questi e quelli) si formano elementi di terzo ordine e così via.

Le medie ci danno via via un aspetto del fenomeno, le concentrazioni ci danno in vece via via un altro aspetto dello stesso fenomeno costituito da questa gerarchizzazione in aggregati della collettività in esame.

Le altre estensioni sono di tipo completamente nuovo e diverso dalle abituali.

Come abbiamo accennato sin da principio, si tratta di considerare una collettività K esaminata simultaneamente rispetto a due caratteri H', H'' tutti due — per semplicità — qualitativi ed accumulabili: sicchè la modalità h'_r del primo, se presente in un individuo di K, si potrà supporre dovuto alla presenza — in quell'individuo — di $h'_r\lambda$ «quanti» di carattere H', e quell'individuo dunque come aggregato (individuo di secondo

ordine) nella collettività KH' dei «quanti» di H; ed analogamente per il secondo carattere H''.

La collettività K, rispetto alle modalità di H' e di H'' si presenta dunque sotto lo schema

	h'_1 , h'_2 , ... , h'_r	
h''_1	n_{11} , n_{12} , ... , n_{1r}	n''_1
h''_2	n_{21} , n_{22} , ... , n_{2r}	n''_2
...	....	...
h''_s	n_{s1} , n_{s2} , ... , n_{sr}	n''_s
	n'_1 , n'_2 , ... , n'_r	N

dove $n'_i = n_{1i} + n'_{2i} + \dots + n_{si}$; $n''_j = n_{1j} + n_{2j} + \dots + n_{rj}$; ed inoltre

$$N = n'_1 + n'_2 + \dots + n'_r = n''_1 + n''_2 + \dots + n''_s .$$

Quì si presentano tre vie di estensione. In base alla prima, che è una ovvia prosecuzione degli abituali metodi, si considerano tutte le collettività parziali costituite da individui aventi la stessa modalità del carattere H' (o di H''); quindi la $K'_1, K'_2, \dots K'$ formate dalle verticali della matrice delle n. Per ognuna di esse si definiscono le curve di concentrazione e il relativo indice: avendovi così

$$R'_1 \;,\; R'_2 \;,\; \dots \; R'_r \, .$$

Si procede poi in modo analogo rispetto al carattere H'', avendosi le collettività parziali $K''_1, K''_2, \dots K''_s$ formate dalle linee ed i rispettivi indici di concentrazione:

$$R''_1 \;,\; R''_2 \;,\; \dots \; R''_s \, .$$

Le relazioni di tipo statistico abituale (indici di correlazione, di concordanza, di regressione, di simiglianza etc.) fra le due seriazioni delle R', R'' dànno ovviamento un primo tipo di analisi statistica simultanea di K rispetto ai due caratteri H ed H'.

Ma, ancora un secondo procedimento, pur consono alla concezione di accumulabilità, si presenta. Infatti, per la accumulabilità di H' noi potremo

appunto studiare la collettività KH' di aggregati di elementi H': conformemente al primo caso esaminato in questo paragrafo.

Vi è così la curva di frequenza definita da

$$\begin{Bmatrix} h'_1 & , & h'_2 & , & \dots & h'_r \\ m'_1 & , & m'_2 & , & \dots & m'_r \end{Bmatrix}$$

dove

$$m'_i = n_{1i} h''_1 + n_{2i} h''_2 + \dots + n_{si} h''_s$$

rappresenta il numero frequenza degli elementi H'' presenti nella classe i—esima rispetto ad H.

Affiancata a questa curva di frequenza si presenta quella di carico

$$\begin{Bmatrix} h'_1 & , & h'_2 & , & \dots & h'_r \\ h'_1 m'_1 & , & h'_2 m'_2 & , & \dots & h'_r m'_r \end{Bmatrix}$$

e quindi la *prima* curva di concentrazione

$$\begin{Bmatrix} m'_1 & , & m'_1 + m'_2 & , & \dots \\ h' m'_1 & , & h'_1 m'_1 + h'_2 m'_2 & , & \dots \end{Bmatrix}$$

con il relativo indice di concentrazione $\overline{R'}$.

In modo del tutto analogo si costituisce l'altro indice di concentrazione $\overline{R''}$ relativo all'altra curva di concentrazione della collettività HK''.

$$\begin{Bmatrix} m''_1 & , & m''_1 + m''_2, \dots \\ h'' m''_1 & , & h'' m''_1 + h'' m''_2, \dots \end{Bmatrix}$$

ove si ponga

$$m''_i = n_{i1} h'_1 + n_{i2} h'_2 + \dots + n_{ir} h'_r .$$

Per ridurre a percentuali, si presenta per la prima curva il numero $m' = m'_1 + m'_2 + \dots = n''_1 h''_1 + \dots + n''_s h''_s$, avendosi

$$\mu'_i = \frac{m'_i}{m'} ,$$

ed il numero:

$$M = \Sigma\, n_{ij}\, h''_i\, h'_j ,$$

avendosi

$$\Theta'_i = \frac{h'_i\, m'_i}{M};$$

per la seconda curva basta scambiare gli apici, solo M restando inalterata

Sicchè in definitiva si hanno due sole curve (e due soli indici) di concentrazione: del primo carattere rispetto al secondo; del secondo rispetto al primo.

Infine, il terzo procedimento, è applicabile (salvo opportune convenzioni che ne possono estendere il campo) solo quando i due caratteri sono della stessa natura: due lunghezze, due periodi di tempo etc.

Si tratta allora di formare un terzo carattere, convenzionale, ottenuto come combinazione lineare dei due dati, cioè $h = \alpha' h' + \alpha'' h''$ e di distribuire K rispetto a questo nuovo carattere convenzionale, esaminandone la curva di concentrazione e il relativo indice

$$R_{\alpha' \ \alpha}.$$

In particolare, potrà essere $\alpha' = \alpha'' = \frac{1}{2}$; in tal modo il numero delle classi viene raddoppiato ed h varia fra 0 ed 1, se anche h' ed h'' hanno tale campo di variazione.

Così, se nel quadro precedente delle n_{ij}, si ha $r = s$; $h'_i = h''_i = \frac{i-1}{r}$, si otterrà in base al carattere misto, la distribuzione di frequenza e quella di carico date da

$$\left\{ \begin{matrix} h_1\,, & h_2\,, \ldots, & h_{2r} \\ n^*_1\,, & n^*_2\,, \ldots, & n^*_{2r} \end{matrix} \right\} , \quad \left\{ \begin{matrix} h_1\,, & h_2\,, \ldots, & h_{2r} \\ h_1 n^*_1\,, & h_2 n^*_2\,, \ldots, & h_{2r} n_{2r} \end{matrix} \right\}$$

e la curva di concentrazione.

$$\left\{ \begin{matrix} h_1 n^*_1\,, & h_1 n^*_1 + h_2 h^*_2\,, \ldots \\ n^*_1\,, & n^*_1 + \quad n^*_2\,, \ldots \end{matrix} \right\}$$

nella quale le:

$$n^*_1 = n_{11}\ , \ n^*_2 = n_{12} + n_{21}\ , \ n^*_3 = n_{13} + n_{22} + n_{31}\,, \ldots$$

sono ottenute sommando per diagonali le n_{ij}...

In particolare se $\alpha' = 0$, $\alpha'' = 1$ oppure se $\alpha' = 1$, $\alpha'' = 0$ si viene ad esaminare la collettività K nella sua concentrazione rispetto al solo carattere lH' o al solo H'', ritornando all'abituale concetto: le n^* diventano allora e n' o le n''.

Come semplice indicazione rileviamo che quanto è stato detto in questo paragrafo può essere applicato ad esempio alle collettività di coppie matrimoniali: il carattere H' essendo l'età della sposa, H'' quello dello sposo ed il carattere H essendo invece l'età globale della coppia.

Oppure si può esaminare uua collettività di uomini rispetto alla statura: in tal caso il carattere H' potrà essere l'altezza ombelico-piedi, il carattere H'' quello della testa-ombelico, mentre H è l'altezza totale.

Infine ancora si potrà paragonare una collettività di ellissi (sezioni craniche) considerando l'asse maggiore, l'asse minore ed una opportuna combinazione lineare dei due, e così via.

5. *Conclusioni.*

Ove, dunque, i caratteri siano di natura accumulabile è conveniente porsi — come abbiamo posto — i seguenti problemi:

α) Comportamento di una collettività somma di due altre, rispetto ad un carattere.

β) Comportamento di una collettività rispetto a due caratteri.

γ) Comportamento di una collettività come collettività non dei suoi elementi ma di certi aggregati di questi.

In ogni caso questa ultima considerazione applicata ai caratteri accumulabili, allorchè una modalità di questi si pensi dovuta alla presenza di « quanti » elementari di carattere, permette di trattare anche gli altri.

E si delineano per tale via estensioni di indici e concetti statistici già noti per le sole collettività ordinarie.

Proprietà gruppali nelle serie di Dirichlet, serie di Dirichlet gruppali

Nota di **G. Barba**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 13 gennaio 1940 - XVIII)

Sunto. — L'A., posta in luce la necessità di imporre una condizione gruppale alle serie di Dirichlet ove le si voglia sottoporre agli ordinari procedimenti di calcolo; studia le proprietà di siffatte serie di Dirichlet gruppali e ne esamina le possibili generalizzazioni, nel campo reale degli esponenti e nel campo complesso.

1. Le serie di Dirichlet propriamente dette sono del tipo:

$$\sum_1^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{0}$$

Con maggiore generalità sono state studiate le serie:

$$\sum_1^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{1}$$

dove $s = \sigma + it$ è la variabile complessa e la successione delle λ_n è:

I) reale; II) positiva; III) crescente; IV) divergente.

Le a_n sono dei coefficienti qualunque, naturalmente vincolati dalle condizioni di convergenza (semplice, assoluta od uniforme). La successione degli esponenti λ_n caratterizza il *tipo* della serie.

Se in (1) si pone $\lambda_n = lgn$, si ritrova la (0); se si pone $\lambda_n = n$, si ottiene una serie di potenze di e^{-s}, nel mentre le sue proprietà si deducono da quelle della serie di Taylor.

Su tali basi sono impostate le odierne ricerche relative alle serie di Dirichelet, eccezion fatta, in certo senso, per quelle del Bohr.

È, però, naturale chiedersi se i vincoli imposti alla $[\lambda_n]$ siano essenziali e, soprattutto, se formino un sistema completo.

2. È necessario, a tal punto, porre subito in evidenza un fatto molto importante consistente nella convenienza di imporre alle serie di Dirichlet una *proprietà gruppale*.

L'importanza di tal carattere — sotto altro aspetto — almeno con riferimento alle serie numeriche, è stata esplicitamente messa in rilievo

dal Prof. G. ANDREOLI in un gruppo di Note [1]). Tale importanza si riscontra, principalmente, nel seguente problema.

Date certe relazioni cui devono soddisfare certe funzioni, segnate queste ultime sotto forma di sviluppi in serie di un dato tipo, dev'essere possibile ottenere le funzioni somma, prodotto di altre due [ed eventualmente derivate ed integrali] tutte ammettenti sviluppi ancora dello stesso tipo. È quanto accade per le serie di TAYLOR, di LAURENT, ecc.

Così, data una equazione differenziale ordinaria lineare a coefficienti periodici di egual periodo, di necessità avviene che per l'effettiva integrazione la funzione incognita ammetta, a sua volta, uno sviluppo in serie di FOURIER, così come i coefficienti.

Imporremo, pertanto, alle serie di DIRICHLET la condizione di possedere un certo «carattere gruppale» nel senso che, fissato un tipo di serie di DIRICHLET, tanto la somma che il prodotto di funzioni rappresentate da serie del tipo, siano, ancora, dello stesso tipo.

Messe da lato le questioni di convergenza — che esamineremo a parte — osserviamo che, contrariamente a quanto si verifica per le serie di potenze ad esponenti non interi la derivazione e l'integrazione conservano il tipo. Una serie di DIRICHLET rispondente alle suaccennate condizioni si scriverà, in modo formale [astraendo da questioni di convergenza e dalle abituali condizioni preliminari]:

$$\sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n \cdot s}$$

e la diremo serie di DIRICHLET *gruppale*, indicandola con il simbolo (Dg).

Evidentemente la somma di due (Dg) dello stesso tipo è ancora dello stesso tipo.

Perchè, invece, il prodotto di due (Dg) dello stesso tipo sia ancora una (Dg) dello stesso tipo, occorre che per ogni coppia di indici s, ρ sia: $\lambda_r + \lambda_\rho = \lambda_p$ con:

$$p = \varphi\ (r, \rho) \tag{3}$$

risultando:

$$\sum a_r e^{-\lambda_r \cdot s} \cdot \sum b_\rho e^{-\lambda_\rho \cdot s} = \sum c_p e^{-\lambda_p \cdot s}$$

---

[1]) G. ANDREOLI. *Nuova teoria delle serie semplici e dei metodi di sommazione: il prodotto, l'assoluta convergenza e la teoria dei gruppi.* Ren. Acc. di Scienze Fis. e Matem., Serie 4.ª, Vol. V, Napoli, 1935. — ID. *Sulla convergenza delle serie ed i suoi caratteri gruppali.* Ren. Acc. Scien. Fis. e Mat., Serie 4.ª, Vol. IX, Napoli, 1938.

dove

$$c_p = a_r a_\rho + a_s a_\sigma + \ldots\ldots$$

essendo:

$$(r, \rho)\ ;\ (s, \sigma)\ ;\ \ldots\ldots$$

le coppie che danno origine, giusta la (3), alle p stesse.

Diremo che una (Dg) è del *tipo* $[\lambda_n]$ in corrispondenza ad una assegnata successione di esponenti, a lor volta godenti la proprietà gruppale e riproducentesi per somma, tale, cioè, che se λ' e λ'' sono due suoi elementi, anche $\lambda''' = \lambda' + \lambda''$ sia un suo elemento.

3. — Si pone, naturalmente, la questione di caratterizzare il tipo di una (Dg).

Diciamo l_j un elemento di $[\lambda_n]$. Per la proprietà (G) — la gruppale, cioè — dovranno figurare in $[\lambda_n]$ tutti gli elementi della forma $r l_j$, con r intero, sicchè la successione contiene, ulteriormente, anche gli elementi

$$\sum_1^n r_i l_i \tag{5}$$

dove le r sono, ora, degli interi non tutti nulli.

Escludiamo che $[\lambda_n]$ possa ammettere come punto limite lo zero, chè, se così fosse, qualunque numero reale sarebbe punto limite, e diciamo $l^{(1)}$ il più piccolo tra i valori assoluti dei numeri (5). Se, allora, i numeri $l^{(1)} \cdot r^{(1)}$ non esauriscono la $[\lambda_n]$, tra gli elementi residui consideriamo il più piccolo, in valore assoluto, $l^{(2)}$ e formiamone i multipli, escludendo questi e tutte le somme, a due a due, dei multipli di $l^{(1)}$ e di $l^{(2)}$; e così via.

I valori $l^{(1)}, l^{(2)}, \ldots, l^{(\nu)}, \ldots$ diremo che costituiscono la *«traccia»*: $\{ l^{(n)} \}$ della successione $[\lambda_n]$. Essa è una particolare base ed è unica per un tipo, sicchè una traccia determina un tipo, un tipo determina una traccia.

Da quanto precede risulta che, affinchè le serie generalizzanti quelle di DIRICHLET possano essere sottoposte ai procedimenti di calcolo, così come le ordinarie serie, devono rispondere alle indicate proprietà gruppali.

Peraltro, queste prepriet̀à imposte alle serie di DIRICHLET abituali, non rappresentano, soltanto, una «necessità» per il loro organico impiego nell'analisi, bensì rispondono a precise esigenze in ben note teorie fisiche.

Le questioni spettrali, nella teoria delle matrici infinite di HEISEMBERG, conducono, precisamente a considerare serie del tipo (Dg). Del resto, ciò è ben noto: in alcune teorie della emissione si richiede che le frequenze

di uno spettro siano tali che la somma di due funzioni dia ancora una funzione dello spettro. Ed è questa, precisamente, la proprietà gruppale delle λ, derivante da quella gruppale delle (Dg).

4. — Sia data una (Dg). Esaminiamo il derivato dell'insieme reale $[\lambda_n]$. Per un siffatto insieme, grazie alla (G), esiste sempre il limite $+\infty$ o $-\infty$ a seconda che in $[\lambda_n]$ vi sono elementi positivi o negativi. Ne segue che l'infinito *non può non presentarsi* tra i valori limiti di $[\lambda_n]$.

Ma altre due ipotesi possono ancora farsi sulle λ_n oltre quella di essere positive e cioè che esse *a)* siano tutte negative, *b)* siano, alcune positive, altre negative.

Un cambiamento di segno ad s, riporta il caso *a)* all'abituale. Esaminiamo il caso *b)*.

Se, ad esempio, $\lambda_r = -\beta$, con β positivo, per la (G) dovrà presentarsi la successione: $\beta, -2\beta, \ldots, -n\beta, \ldots$ ammettente, ovviamente, il valore limite $-\infty$.

Supponiamo vi sia *almeno* una coppia di valori di λ, uno positivo α, l'altro negativo $-\beta$, α e β essendo tra loro incommensurabili. Per la (G) si presenterà in $[\lambda_n]$ anche $m\alpha - n\beta$, con m ed n interi. Com'è ben noto, tale espressione, per m ed n opportunamente scelti, potrà avvicinarsi a qualunque valore reale γ prefissato. Sicchè, in tal caso, *tutti i numeri reali* saranno punti limiti.

Escludiamo che non esista nemmeno una coppia di valori di λ, tra loro incommensurabili. Sarà: $\alpha_r = \frac{p}{q}\beta_s$.

Due casi sono, qui, da esaminare:

A) i numeri $\frac{p}{q}$ non formano tutto l'insieme dei numeri razionali, e si presentono, così, soltanto i due punti limiti $+\infty$ e $-\infty$.

B) i numeri $\frac{p}{q}$ formano tutto l'insieme dei numeri razionali.

In tale supposizione, per la (G) è:

$$\alpha_\rho = m\alpha_r \,, \quad \beta_\sigma = n\beta_s \,, \text{ onde: } \alpha_\rho = \frac{p}{q}\,\frac{m}{n}\,\beta_\sigma$$

Ne segue una infinità di punti limiti.

Riassumendo: se le λ_n sono reali si hanno le seguenti possibilità per i punti limiti:

I) unico punto limile: $+\infty$, se le λ_n sono positive.

II) unico punto limite: $-\infty$, se le λ_n sono negative.

III) due, soli, punti limiti: $+\infty$ e $-\infty$ se le λ_n sono positive (α_r) e negative (β_σ), a coppie (α_r, β_σ) commensurabile: $\alpha_r = \frac{p}{q}\beta_\sigma$ e quindi tutte

multiple di un solo valore, mentre i numeri $\frac{q}{q}$ non formano tutto l'insieme dei numeri razionali.

IV) Tutti i numeri reali sono valori limiti se le λ_n sono positive (α_r) e negative (β_σ) e:

a) esiste una coppia $(\alpha^{(1)}, \beta^{(1)})$ di numeri incommensurabili.

b) tutte le coppie (α_r, β_σ) sono incommensurabili: $\alpha_r = \frac{p}{q}\beta_\sigma$, ma i numeri $\frac{p}{q}$ formano tutto l'insieme dei numeri razionali.

In sostanza i punti limiti di $[\lambda_n]$ sono: uno, due o tutti i numeri reali. Il caso di due punti limiti, $+\infty$ e $-\infty$ può pensarsi non dissimile dal primo ove si parli di infinito lungo una data semiretta orientata.

Nel I.° caso la traccia è arbitraria; nel III.° è composta di $+l$ e $-l$; nel IV.° è qualunque (numeri positivi e negativi).

5. Dalla precedente discussione su $[\lambda_n]$ consegue che due vie restano aperte circa le possibili condizioni da imporre alle serie di Dirichlet generalizzate, ad esponenti reali:

a) Conservare la condizione che $[\lambda_n]$ — così come nel caso ordinario — abbia *un sol* punto limite ed in tal caso le λ_n devono *tutte* essere positive (o negative) ed, ovviamente, si possono ordinare in maniera di essere crescenti e tendenti all'infinito.

Avremo, in tal modo, serie di Dirichlet gruppali soddisfacenti alle stesse condizioni, per gli esponenti, delle serie ordinarie di Dirichlet.

In tal caso più che di una « generalizzazione » della serie di Dirichlet è da parlare di un *completamento* e di una *utilizzazione* della serie stessa agli effetti di poterla sottoporre ai comuni procedimenti di calcolo.

b) Lasciar cadere la (G) — con le conseguenze già esplicitate — ed in tal caso la restrinzione di 1, 2, ∞ punti limiti per la $[\lambda_n]$ non sussiste più sì che si può pensare a serie di Dirichlet generalizzate nel senso che $[\lambda_n]$ può ammettere un numero finito (qualsiasi) o infinito di punti limiti.

Quali che ne possano essere i risultati resta il fatto che si hanno nuovi e più ampi tipi di serie da investigare, ma a sè stanti e quindi inefficaci quali strumenti di calcolo.

6. Supponiamo in una (Dg) le λ_n complesse: $\lambda_n = \xi_n + i\eta_n$.

Per la (G) le affisse dei λ_n dovranno distribuirsi nei vertici di un certo reticolo relativo ad un settore determinato dall'origine e da due valori estremi delle λ_n stesse.

Possiamo supporre, anche qui, come nel caso reale, che l'origine non sia punto limite di $[\lambda_n]$. Si può allora procedere ad un certo ordinamento — che si può effettuare in doppio modo dai λ_n, permettente di individuare, nel caso complesso, la traccia. Si sceglie fra tutte le affisse dei λ_n quella

di minimo valore assoluto per l'argomento $\varphi^{(1)}$ e di minimo, modulo formandone i successivi multipli: se le affisse corrispondenti non esauriscono tutte le λ_n aventi argomento $\varphi^{(1)}$, si considera, tra le affisse rimanenti dello stesso argomento, quella avente minimo modulo $\rho^{(2)}$ e se ne formano i multipli e le somme a due a due dei multipli relativi a $\rho^{(1)}$ ed a $\rho^{(2)}$, e così via.

Si passa, quindi, all'argomento di minimo, valore assoluto, $\varphi^{(2)}$ e ecc.

Naturalmente si possono invertire le funzioni di ρ e di φ in tale ordinamento.

Su ogni direzione uscente dall'origine nel settore considerato, si ha un punto limite all'infinito. Tale punto limite potrà essere unico solo se la « traccia » è composta di elementi aventi lo stesso argomento: il punto limite sarà, allora, il punto all'infinito corrispondente a tale direzione e verso, sempre che, di per sè, la successione $[\lambda_n]$, su detta direzione non ammetta un insieme derivato, finito od infinito, ivi compreso, in ogni caso il punto infinito.

Esaminiamo, più particolarmente, il caso di un unico punto limite all'infinito.

Sono possibili i seguenti casi; punto limite secondo:

a) una direzione (corrispondente al caso reale di un sol punto limite).

b) due direzioni opposte (corrispondente al caso reale di 2 punti limiti $+\infty$, $-\infty$).

c) due direzioni distinte (che danno quindi luogo ad un settore reticolato) e quindi a *tutte* quelle intermedie.

d) tutte le direzioni.

Perchè esista un sol punto limite all'infinito, per (G) occorre che: $\xi_1, \xi_2, \ldots$ e $\eta_1, \eta_2, \ldots$ tendano all'infinito.

Se potessero le λ_n addensarsi intorno ad un valore $\alpha + i\beta$ dovrebbero potersi trovare degli interi $m_1, m_2 \ldots$ tali che

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + \ldots = \alpha + \varepsilon \qquad \text{e} \qquad m_1 \eta_1 + m_2 \eta_2 + \ldots = \beta + \delta$$

Se non esistono ξ ed η negative e se le ξ ed η tendono all'infinito, non esistono, certo, altri punti limiti oltre l'infinito. Ciò non sussiste più se supponiamo qualche ξ (o qualche η) negativo, chè se infatti fosse $\xi_1 = -\xi'_1$ allora potendo sempre combinare tale ξ negativo con le altre ξ nella ipotesi che i corrispondenti coefficienti interi siano nulli ad eccezione di uno, si avrebbe: $-m_1 \xi'_1 + m_2 \xi_2$, combinazione che per opportuni valori di m_1 e m_2 può avvicinarsi a qualunque prefissato valore.

Se risulta: $\xi_1 = -\xi_2$, allora il reticolo è ridotto a: $m'_1 \xi_1 + i\, m''_1 \eta_1$ dove m'_1 ed m''_1 possono essere positivi e negativi.

Per quanto precede, possiamo concludere nel seguente modo:

Caso a) La traccia può essere costituita da infiniti elementi: $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ tali che $\zeta_r = \mu_r \cdot \zeta_0$, dove le μ_r sono reali, crescenti tendenti all' infinito.

Caso b). La traccia è unica, dovendo essere $\zeta_r = m_k \zeta_0$ con la m intero. (positivi o negativi).

Caso c). La traccia è costituita da punti a modulo qualunque, purchè crescente, con *un sol* punto limite all' infinito: l'argomento può essequalunque nel settore.

Caso d). I punti in tal caso sono forniti da:

$$\lambda = m' (\alpha' + i\beta') + m'' (\alpha'' + i\beta'')$$

dove m' ed m'' sono interi positivi e negativi, essendo la traccia costituita almeno da:

$$\zeta' = \alpha' + i\beta ; \ -\zeta' ; \ \zeta'' = \alpha'' + i\beta'' ; \ -\zeta''.$$

L'attacco anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini.

Nota dell'ing. **Mario M. Jacopetti**, *presentata dal socio* **F. Giordani**

(Adunanza del dì 2 febbraio 1940 - XVIII)

Sunto. — Dedotta, da un esame della letteratura sull'argomento, la deficienza di dati recenti sul consumo degli anodi di grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini, si descrive una piccola cella sperimentale impiegata per studiare il comportamento delle moderne grafiti. Si forniscono i risultati di una prima serie di esperienze intese a conoscere come varia l'attacco anodico con il variare della concentrazione dell'anolita e per la presenza o meno degli ioni SO_4^{--} e ClO_3^{-}. Si è realizzata una circolazione dell'anolita che dimostra di essere favorevole nel ridurre l'attacco degli anodi di grafite.

Il comportamento degli anodi di grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini è stato oggetto di studio da parte di tecnici e ricercatori non appena questo processo elettrochimico si è affermato nella pratica industriale.

In un primo tempo il problema interessava per sostituire gli anodi di platino nei vari tipi di elettrolizzatori per produzione di ipocloriti, di clorati e di idrossidi alcalini, e le esperienze sono state condotte sia con dispositivi senza diaframmi, lasciando libero corso alle reazioni secondarie, (preparazione di ipocloriti, clorati, ecc.) sia con dispositivi a diaframma per tener distinti i prodotti anodici da quelli catodici, al fine di studiare il comportamento degli anodi negli elettrolizzatori per idrossidi alcalini, i quali sono oggi di gran lunga i più diffusi.

È appena il caso di ricordare che gli elettrolizzatori a campana ed a catodo di mercurio, pur non avendo un diaframma, sono paragonabili, per quanto riguarda il comportamento anodico, ad un elettrolizzatore con diaframma. Alla condizione beninteso che si abbia sempre da fare con dispositivi funzionanti con buoni rendimenti.

Tralasciando i lavori più antichi ricorderemo quelli di Winteler [1]) e di Zellner [2]), i quali hanno eseguito per primi ricerche sistematiche avendo anche di mira l'indagine sul meccanismo del fenomeno.

Segue la classica memoria di Foerster e Jorre [3]) sulla elettrolisi dei

---

[1]) Winteler F., *Zeits. für Elektrochemie.* 5 (1898) p. 10.

[2]) Zellner J., » » » 5 (1898) p. 454.

[3]) Foerster F. e Jorre F., *Zeits. für anorg. Chemie.* 23 (1900), p. 158-219.

cloruri alcalini, nella quale figura anche un apposito capitolo dedicato alle esperienze con anodi di carbone.

Premesse alcune considerazioni teoriche sulla natura del fenomeno, gli AA. forniscono i risultati di una serie di prove, eseguite adoperando vari tipi commerciali del materiale allora disponibile e cioè la grafite da carbone di storta (Gasretortengraphit). L'elettrolizzatore era costituito da un recipiente di vetro, della capacità di circa 3 litri, con un diaframma di porcellana porosa e con agitazione del catolita.

Le esperienze venivano eseguite adoperando come elettroliti soluzioni di cloruro di potassio o di sodio, le cui concentrazioni massime erano: per il primo 290 g/l; per il secondo 230 g/l. La densità di corrente adoperata era di 1,2 A/dmq per una prima serie di prove, e di 1 A/dmq per una seconda serie. Le concentrazioni di cui trattasi, tenuto conto altresì dell'impoverimento anodico dovuto ai fenomeni di trasporto, risultano troppo basse per ottenere la migliore conservazione degli anodi. Le esperienze ebbero rispettivamente la durata massima di 11 e di 30 ore, raggiungendosi temperature dell'ordine dei 30°C. Le concentrazioni di alcali raggiunte nel catolita furono di regola inferiori e, in una esperienza, superarono di poco la normale. Vennero determinati i rendimenti di corrente, e — con molta accuratezza — le quantità di ossigeno e di anidride carbonica presenti nei gas anodici, rivelandosi fino al 9,5 % di CO_2.

Queste esperienze non sono, come del resto avevano dichiarato gli autori, che l'inizio di una serie di ricerche, continuate dallo stesso FOERSTER negli anni immediatamente successivi, e riassunte poi nel suo classico trattato sulla elettrochimica delle soluzioni acquose [4]).

È sopratutto in un lavoro pubblicato nel 1903 [5]) che il FOERSTER ha trattato in particolare la questione dell'attacco degli anodi di carbone, eseguendo prove comparative con diversi materiali, determinando i consumi e fornendo una tabella dei risultati.

Le esperienze, volte anche a precisare la natura e le modalità del processo, erano condotte in modo da evitare la scarica degli ioni OH^-, migranti all'anodo; ma gli accorgimenti sperimentali adottati avevano carattere di espediente senza alcuna rispondenza con le reali condizioni della elettrolisi industriale.

In una serie di memorie SPROESSER [6]) ha esaminato il comportamento di molti tipi di carboni, fra quelli allora disponibili sul mercato, determinandone le caratteristiche e sottoponendoli all'esperienza con un dispositivo analogo a quella per la prima volta adoperato da FOERSTER e JORRE. Lo

---

[4]) FOERSTER F., *Elektrochemie Wässeriger Lösungen*. Lipsia, 1922, p. 683 e seg., 708 e seg.

[5]) FOERSTER F., *Zeits. für Elektrochemie*. *9*, (1903) p. 286.

[6]) SPROESSER L., *Zeits. für Elektrochemie*. 7 (1901) p. 981-87; 1012-28; 1071-83.

Sproesser ha tentato anche esperienze a temperature più alte fino a 70°; ma in tali condizioni ha constatato un forte attacco del diaframma di porcellana porosa ed egli non riporta i risultati, che dichiara privi di significato. La cella adoperata dallo Sproesser, sebbene di tipo uguale a quella di Foerster e Jorre, era di dimensioni più piccole: l'analisi dei gas era compiuta con accuratezza paragonabile. Le concentrazioni delle salamoie di partenza erano dello stesso ordine di grandezza di quelle adoperate da Foerster e Jorre (massimo 296 g/l) e lo stesso può dirsi per gli altri parametri: temperatura, concentrazione in alcali del catolita, ecc.

Le quantità di ossigeno e sopratutto di anidride carbonica presenti nei gas anodici erano sempre notevoli, raggiungendosi alla fine delle esperienze, nel caso più svantaggioso perfino il 25 % di CO_2, contro un valore del 6 % anche per il campione migliore. Si trattava di prove di lunga durata realizzate in un periodo di 5 giorni e compiute in 4 riprese per la necessità di cambiare l'elettrolita. Lo Sproesser ha adoperato delle soluzioni sia di KCl che di NaCl; le prove di lunga durata sono state compiute soltanto col secondo di essi.

Le densità di corrente impiegate erano anche piuttosto basse raggiungendo al massimo 3 A/dmq.

I risultati di Sproesser coincidono, come egli stesso dichiara, con quelli di Foerster e Jorre, tenuto conto del fatto che lo Sproesser opera con celle di minore capacità.

È interessante trascrivere una tabellina riassuntiva pubblicata da Sproesser in fine del suo lavoro ed utilizzata per trarre alcune conclusioni. Essa si riferisce a prove comparative eseguite con vari carboni e con cellule elettrolitiche munite o prive di diaframma.

Tabella I

Tipo del carbone	NRI	KKIII	KK V	KKIV
Attacco % senza diaframma a 60° .	24	41	27	37
Attacco % con diaframma a temperatura ambiente	9	29	12	—
Perdita in grammi, per 100 Ao, senza diaframma, a 60°	3,63	10,0	6,21	5,58
Perdita in grammi, per 100 Ao, con diaframma, a temperatura ambiente.	2,45	18,8	3,72	—

Poichè 100 Ao con una resa del 95 % corrispondono a 191 g di NaOH; i consumi reali (senza tener conto dei consumi supplementari dovuti a residui di elettrodo, teste, ecc.) vanno da un minimo di 2,5 ad un massimo di 3,3 % di NaOH. La pratica attuale mostra che il consumo globale di rado raggiunge 0,7 % e questo dimostra quanto cammino si è fatto nella qualità dei materiali e nelle condizioni di uso. Aggiungasi poi che l'attacco unitario cresce a misura che procede l'invecchiamento per lo sgretolamento della superficie dell'elettrodo. Anche la durata quindi delle prove sembra insufficiente.

Ma quel che più interessa osservare in merito ai dati della tabella è il fatto che l'autore ne ha tratto la conclusione, peraltro anche poco conforme agli stessi valori numerici da lui accertati, di un sensibile parallelismo di comportamento nell' elettrolisi con o senza diaframma. La conclusione è passata, senza critiche e senza esami approfonditi, nella letteratura scientifica e ne è nata una tecnica di prova rapida degli anodi di carbone sottoponendoli ad elettrolisi senza diaframma con un elettrolita tipo (250 cmc di soluzione contenente 50 g di NaCl puro e 0,5 g di K_2CrO_4). Tale elettrolita viene designato comunemente col nome di «soluzione di FOERSTER», avendo questi in certo modo confermato tale sistema di prova. L'accennato metodo per la prova dei carboni è stato adoperato in tempi più recenti da ARNDT [7]) utilizzando i tipi più moderni di grafite, densità di corrente fino a 10 A/dmq e prolungando l'elettrolisi per tempi maggiori.

Successivamente U. POMILIO [8]) ha pubblicato molti dati sul consumo degli anodi di grafite ottenuti con prove dello stesso genere ed avendo di mira una valutazione comparativa dei vari mezzi di impregnazione.

Anche BROCHET [9]) ha proposto un metodo di prove accelerate senza diaframma per carboni da anodi, metodo che concettualmente corrisponde a quello consigliato dal FOERSTER, ma è ancora più semplicistico.

Più recentemente infine parecchi studiosi si sono occupati dei fenomeni che avvengono agli anodi di grafite, impiegati nei processi elettrolitici, e della loro distruzione. Questi lavori — di cui la massima parte non ci é stata accessibile nel testo integrale — riguardano più specialmente il lato teorico della questione per spiegare il meccanismo dell' attacco e riguardano anche condizioni di impiego diverse da quelle di cui noi ci occupiamo [10]). Ricorderemo perciò solo la serie di lavori pubblicati da JOFFE [11]) che trattano dei processi anodici nella elettrolisi dei cloruri alca-

[7]) ARNDT K. e FEHRE W., *Zeits. für Elektrochemie. 28* (1922), p. 376.
» » . *Die Künstlichen Köhlen.* 2ª Ed., Lipsia, 1932.

[8]) POMILIO U., *Giornale di Chimica Industriale ed Applicata.* 7 (1925), p. 63.

[9]) BROCHET A., *La soude electrolytique.* Parigi, 1909.

[10]) *Chemisches Zentralblatt*: 1933, I, 2060; 1933, II, 1560; 1936, II, 1221; 1938, I, 3739.

[11]) JOFFE W. S., *Zeits. für Elektrochemie.* 42 (1936) p. 71-85.

lini con elettrodi di grafite impregnati e non impregnati. Questi lavori studiano sistematicamente il problema e danno una interpretazione del fenomeno in esame sulla base di investigazioni sperimentali, ma non sono però direttamente orientati verso lo studio quantitativo del consumo degli anodi, e pertanto, sebbene siano di notevole interesse, nei riguardi dell'argomento che trattiamo, non li esamineremo in questa sede.

Da questo esame sommario dei dati esistenti nella letteratura appare come finora si abbiano a disposizione dati molti scarsi circa il consumo degli anodi di grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini; la massima parte di essi riguardano carboni di qualità molto scadente utilizzati dai primi sperimentatori, o sono ricavati con un metodo di prova accelerata che non corrisponde affatto alle reali condizioni di funzionamento.

I dati del Foerster, vecchi di circa 40 anni, vengono ancora citati e riferiti anche in pubblicazioni abbastanza recenti.

Manca qualunque sicuro elemento di giudizio per valutare l'influenza che, sul consumo degli anodi, possono avere i vari fattori: densità di corrente, temperatura, concentrazione dell'anolita, presenza di sostanze estranee o di prodotti secondari dell'elettrolisi, ecc. Abbiamo perciò ritenuto opportuno di istituire una ricerca in cui venisse esaminato il comportamento degli anodi di grafite, eseguendo la elettrolisi in condizioni le più prossime a quelle del pratico esercizio industriale, e tali da permettere di sceverare le influenze dei vari fattori.

Riferiamo di seguito i risultati preliminari ottenuti in una prima serie di esperienze, mentre ci riserviamo di pubblicare successivamente i risultati di altre esperienze tuttora in corso, che permetteranno lo studio complessivo del problema.

Apparecchi e dispositivo sperimentale.

L'aspetto più importante del problema, per la molto maggiore entità delle applicazioni, è quello relativo al consumo degli anodi negli elettrolizzatori destinati alla produzione degli alcali caustici. In questo caso ormai l'anolita è praticamente privo dei prodotti secondari dell'elettrolisi e può soltanto contenere sensibili quantità di clorati solo quando si effettua una circolazione continua dell'anolita come avviene di regola nei moderni apparecchi a catodo di mercurio. Bisogna tener conto altresì della presenza di solfati che possono trovarsi come impurezza del sale commerciale.

Dovevamo perciò in primo luogo costruire un elettrolizzatore, che riproducesse in piccolo le condizioni effettive di marcia industriale, ed abbiamo preferito per semplicità di costruire un tipo a diaframma. L'unico inconveniente di questo tipo di apparecchi è l'impoverimento non facilmente controllabile della soluzione anodica in conseguenza dei fenomeni

di trasporto. Volendo quindi isolare i vari fattori che influiscono sul consumo si presentava la necessità di effettuare una abbondante circolazione anodica indipendente, in modo da esser sicuri che — nelle condizioni di

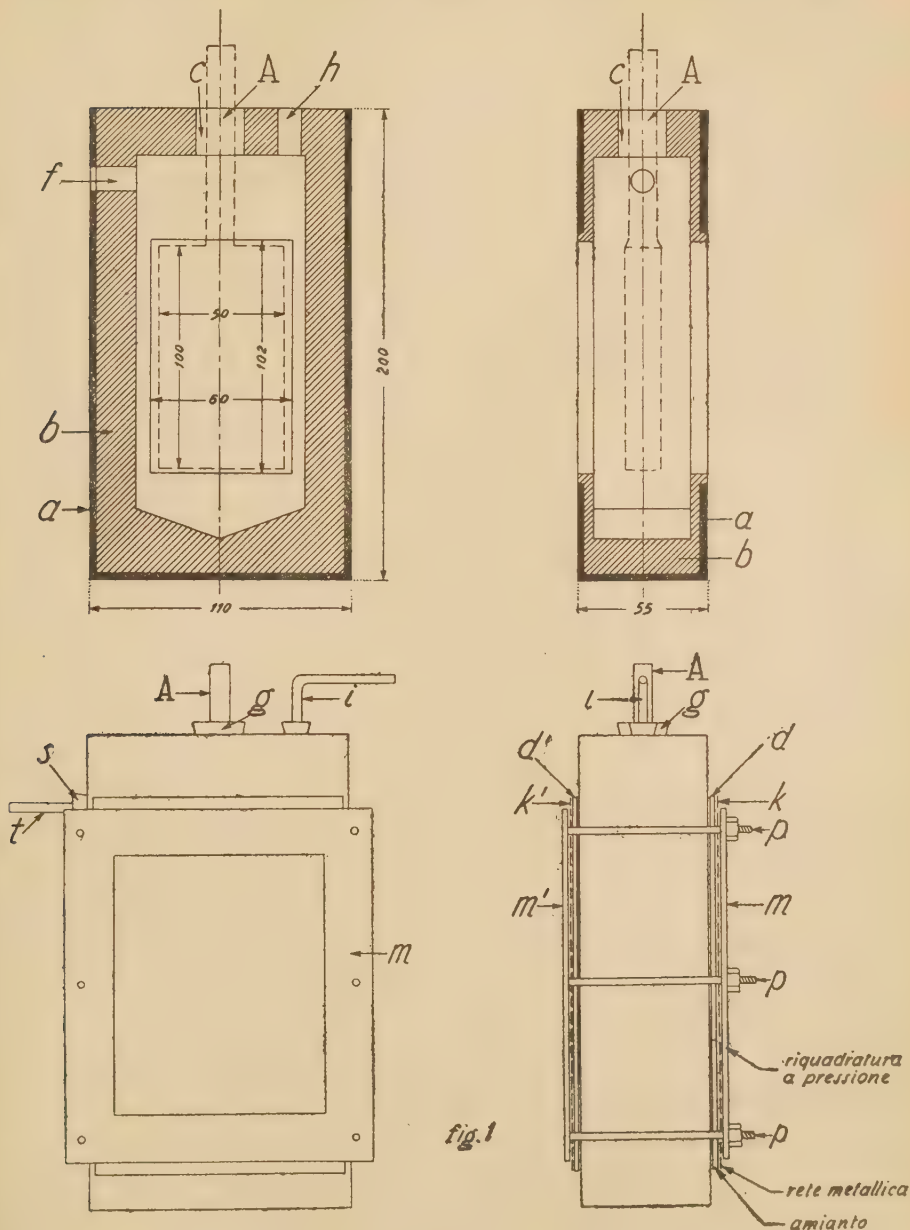



fig. 1

regime — la concentrazione dell'anolita non fosse molto diversa da quella della salamoia di alimentazione,

La camera anodica dell'elettrolizzatore era costituita da una cassetta di forma parallelepipeda (fig. 1) avente le dimensioni di $11 \times 5{,}5 \times 20$ cm, fabbricata in lamiera di ferro *a* dello spessore di 3 mm, completamente rivestita all'interno con uno spesso strato di ebanite *b* sagomato in modo opportuno. Sulle faccie maggiori della cassa erano praticate delle aperture di $6 \times 10{,}2$ cm in corrispondenza delle quali venivano applicati i diaframmi. L'anodo *A* era fissato, a mezzo di un tappo di gomma *g* nel foro *c* facendo sporgere l'estremo del gambo per effettuare il collegamento elettrico. Ci siamo sempre assicurati che l'ebanitatura dell'interno della cella fosse integra senza fori od incrinature che compromettessero l'isolamento dell'anolita rispetto alla armatura metallica della cassa. I diaframmi *d* e *d'* erano costituiti ciascuno da un cartone di amianto di 1 mm di spessore, trattenuto, per evitare lo spappolamento, fra due tele di amianto: il tutto era mantenuto in una cornice di gomma, così che l'area lasciata libera dalla cornice corrispondesse esattamente a quella delle aperture praticate nella cassetta anodica. All'esterno dei diaframmi venivano appoggiati i catodi *k* e *k'* costi tuiti da rete metallica: il tutto era tenuto in posto da due cornici metalliche *m* ed *m'* strette con passanti a vite *p*. Così si delimitava la camera anodica dalla quale l'anolita era forzato a filtrare attraverso i diaframmi. La salamoia alimentatrice proveniente dalla boccia di MARIOTTE (fig. 2) era addotta alla camera anodica attraverso il tubo *t*, calzato con un tappo di gomma *s* nel foro *f*: il tubo *i* situato nel foro *h* serviva all'efflusso dell'anolita in eccesso e del cloro anodico. Una piccola vaschetta *v* (fig. 2) sottostante alla cella serviva a raccogliere la soda filtrata.

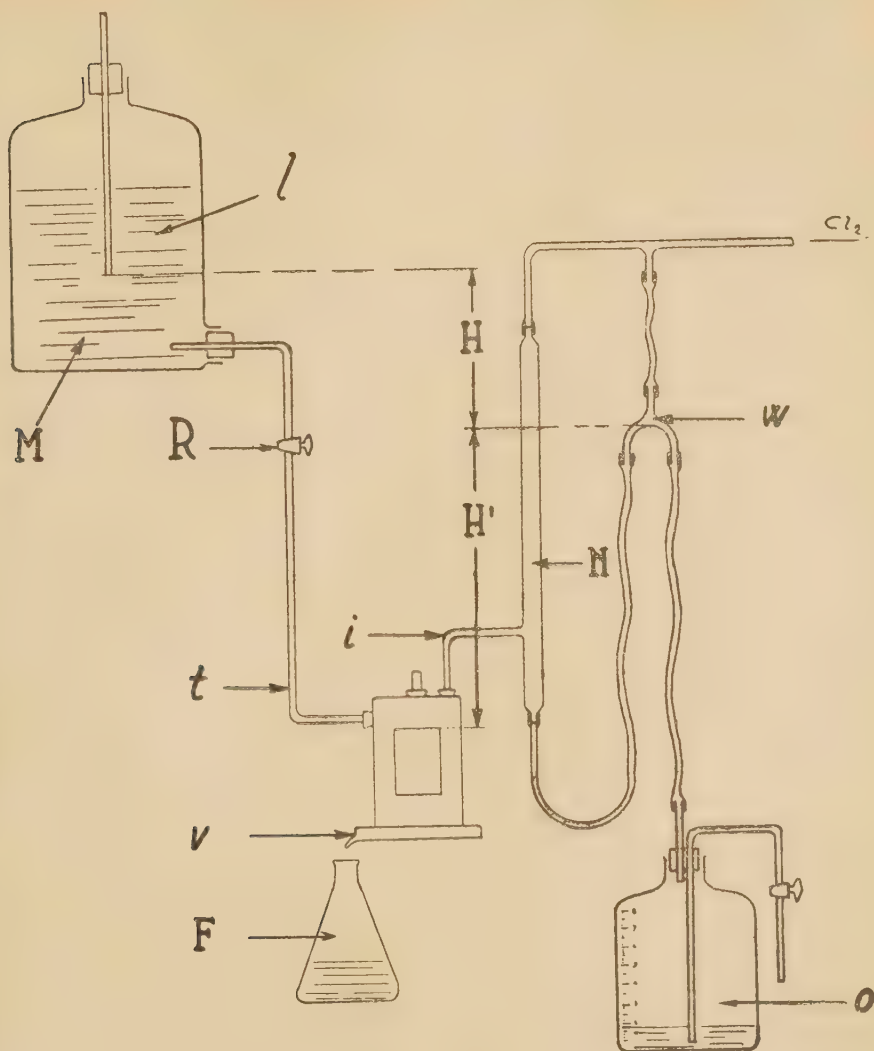
L'alimentazione era mantenuta costante, mantenendo costante il battente di liquido *H* e poteva essere regolata facendo variare la perdita di carico con la manovra del rubinetto *R*. L'effluente anodico in eccesso, rispetto alla quantità filtrata dai diaframmi, passava attraverso il tubo *i* riempiva il tubo *N* fino ad un'altezza regolata dalla posizione del tubo a tre vie *w*, dal quale si scaricava poi nella boccia tarata *O*. Il cloro che si liberava nel tubo *N* e nella boccia *O* veniva raccolto e portato con unica tubazione al sistema di assorbimento ad idrato di calcio.

La velocità di filtrazione attraverso i diaframmi veniva regolata variando il carico idrostatico *H'* del liquido anodico rispetto ai diaframmi, carico che veniva fissato spostando l'altezza del sifone di vuotamento *w*.

L'effluente catodico veniva raccolto nella bevuta *F* e l'eccesso di circolazione anodica nella boccia tarata *O*, munita di sifone per il prelievo dei campioni in marcia. La portata dell'effluente anodico era tenuta uguale al doppio circa di quella dell'effluente catodico, risultando quindi per l'alimentazione una portata circa tripla.

Cinque di questi dispositivi sono stati tenuti contemporaneamente in

marcia disponendo le cellule in serie in unico circuito elettrico alimentato con una intensità di 5,1 A. Le bocce di alimentazione avevano, come ve-

fig 2

dremo, liquidi di composizione diversa, tutte le altre condizioni di lavoro essendo uguali.

Gli elettrodi di prova avevano le dimensioni di $9{,}5 \times 5{,}4 \times 1{,}5$ cm e lavorando sulle due facce davano a disposizione la superficie di 1,02 dmq: di

talchè si aveva nelle nostre prove una densità di corrente di 5 A / dmq. Essi erano provvisti di un gambo cilindrico della lunghezza di circa 10 cm e del diametro uguale allo spessore dell' anodo stesso.

I diaframmi erano di bassa permeabilità per avere piccole perdite di diffusione e per realizzare un carico idrostatico H' elevato, rispetto al quale si poteva ritenere trascurabile l'altezza del diaframma. Con ciò si realizzava una distribuzione praticamente uniforme della velocità di efflusso su tutti i punti del diaframma: l'altezza H' poteva essere variata nel tempo — a mezzo del tubo w — in modo da adeguare il carico al progressivo intasamento dei diaframmi.

Abbiamo preparato una volta per tutte una notevole quantità di salamoia alimentatrice con sale depurato. Questa soluzione conteneva 304,7 g di NaCl, 1,9 di Na_2SO_4, ed 1,2 g di $NaClO_3$ per litro.

A partire da questa unica soluzione si sono preparate 5 diverse salamoie per le cinque cellule, al fine di studiare l'influenza della concentrazione di NaCl e della presenza di clorati e di solfati. Le soluzioni, rispettivamente numerate da 1 a 5, avevano le seguenti composizioni espresse in grammi per litro:

Tabella II

Soluzione	NaCl	Na_2SO_4	$NaClO_3$
1	287,4	1,9	1,2
2	230,2	1,9	1,2
3	187,4	1,9	1,2
4	287,4	11,9	1,2
5	287,4	1,9	11,2

Materiale adoperato per gli anodi.

Per la preparazione degli anodi ci siamo serviti di blocchi di produzione della S. A. Elettrografite di Forno Allione, messi a nostra disposizione dalla S. A. Cellulosa Cloro Soda di Napoli. Dai blocchi — aventi le dimensioni di $120 \times 7,5 \times 20$ cm, abbiamo ricavato delle strisce di spessore di 1,5 cm, avendo cura che tutti gli elettrodi di una stessa serie di esperienze provenissero da una stessa regione del blocco per evitare differenze dipendenti da un diverso grado di grafitizzazione.

Su alcuni campioni, prelevati da zone diverse della stessa barra da cui si erano ricavati gli anodi, si sono eseguite le determinazioni qui appresso elencate.

Densità apparente. — Su quattro campioni di $2 \times 2 \times 2$ cm; alla temperatura di 20° C, si sono trovati i seguenti valori:

campione 1	1,587
» 2	1,588
» 3	1,582
» 4	1,580
media	1,584 $\cong$ 1,58

La determinazione della *porosità* è stata eseguita sugli stessi campioni secondo le norme consigliate da ARNDT [12]), ottenendo i seguenti risultati:

campione 1	22,52 %
» 2	22,89 %
» 3	22,55 %
» 4	22,74 %
media	22,67 % $\cong$ 22,7

Conduttività. — Si è determinata mediante il ponte doppio di THOMSON avvalendosi di speciali ganasce di attacco in numero di quattro, due delle quali più esterne servivano per l'adduzione della corrente in modo da assicurarne la distribuzione più uniforme. I campioni in numero di 3, erano stati prelevati rispettivamente due (2, 3) verso le facce esterne della barra originaria, e l'altro (1) verso il centro.

I valori seguenti rappresentano la media di parecchie misure concordanti:

	resistività Ω cm	conduttività $(\Omega\ \text{cm})^{-1}$
Campione 1	$9{,}94 \cdot 10^{-4}$	$1{,}006 \cdot 10^{3}$
» 2	$9{,}75 \cdot 10^{-4}$	$1{,}025 \cdot 10^{3}$
» 3	$9{,}74 \cdot 10^{-4}$	$1{,}027 \cdot 10^{3}$

Evidentemente la minore conduttività del campione 1 deve attribuirsi ad una meno completa grafitizzazione della barra nella zona centrale.

Risultati sperimentali.

Le esperienze sono state effettuate a temperatura ambiente. Esse hanno avuto inizio il 23 marzo 1939 e sono state interrotte il 3 maggio seguente.

---

[12]) ARNDT K., Loc. cit. p. 158-159.

con una durata complessiva di 960 ore di funzionamento, alle quali in ragione di 5,1 A corrisponderebbero 5760 Ao, ridotte a 5500 effettive tenendo conto di alcune interruzioni dovute ad inconvenienti di esercizio. La soda, raccolta in periodi di 24 ore, veniva misurata ed analizzata per determinare il rendimento, le stesse misure si facevano sulla salamoia di circolazione per controllarne il titolo.

Si sono anche eseguite numerose analisi dei gas anodici delle varie celle; ma il tenore di CO_2 è rimasto sempre inferiore a poche unità per mille, confermando l'ottimo comportamento delle moderne grafiti anodiche, rispetto a quelle usate dai vecchi sperimentatori. Data la precisione raggiungibile in tali analisi i numeri ricavati non possono servire a deduzioni quantitative, si può dire soltanto che la cellula N. 4 ha dato luogo sistematicamente ai valori più elevati.

La tabella III riporta i dati di funzionamento relativi alle 5 cellule sperimentali. In essa V_c indica il volume dell'effluente catodico raccolto nelle 24 ore e t_c il contenuto di NaOH espresso in g/L; η indica il rendimento percentuale di corrente; V_a il volume dell'eccesso di liquido anodico effluente nelle 24 ore e t_a il suo contenuto di NaCl anche espresso in g/L; infine t_s indica lo stesso contenuto per la salamoia alimentatrice.

Tabella III

Data	V_c	t_c	η	V_a	t_a
Cella N° 1 : t_s = 287 g/L					
26-3	57	123	93	120	—
3-4	55	131	95	100	285
12-4	50	145	96	110	277
20-4	48	135	96	120	—
24-4	52	145	99	—	263
Cella N° 2 : t_s = 230 g/L					
24-3	58	104	80	130	—
3-4	52	127	87	130	205
13-4	49	142	92	126	215
24-4	53	126	89	130	218
Cella N° 3 : t_s = 187 g/L					
26-3	54	91	65	80	—
29-3	55	111	80	110	173
2-4	51	121	82	—	178
10-4	57	119	90	109	170
22-4	57	119	90	98	167
24-4	59	114	89	100	170

Segue Tabella III.

Cella N° 4 : $t_s = (287\ g\ NaCl + 11{,}9\ g\ Na_2SO_4)/L$

27-3	47	122	75	110	—
29-3	57	119	89	90	260
3-4	50	138	91	110	264
17-4	55	123	90	—	—
22-4	48	135	85	—	—
24-4	41	152	83	140	274

Cella N° 5 : $t_s = (287\ g\ NaCl + 11{,}2\ g\ NaClO_3)/L$

27-3	57	113	85	103	273
1-4	54	131	94	—	273
9-4	51	143	96	—	273
17-4	55	121	88	85	261
22-4	58	126	97	94	274
24-4	56	129	95	110	277

La tabella IV contiene invece le perdite totali subite dai vari elettrodi, durante l'intero periodo di funzionamento.

TABELLA IV

Anodo	Perdita di peso totale in g
1	3,14
2	6,52
3	7,98
4	8,19
5	3,44

Converrà accennare al modo che è stato tenuto per eseguire quest'ultima determinazione.

Gli anodi nuovi, opportunamente contrassegnati, sono stati lavati a freddo per parecchio tempo con acqua distillata e sotto vuoto per controllare che l'acqua ricuperata risultasse esente di cloruri. Sono quindi stati seccati a 110° C fino a peso costante. Alla fine delle esperienze gli anodi sono stati cautamente smontati dalle cellule e sottoposti ad un analogo trattamento per eliminare completamente i cloruri. Si eseguivano all'uopo ripetuti lavaggi con acqua distillata sotto vuoto, fino a quando si raccoglievano liquidi

di lavaggio esenti di cloruri. Quindi si essiccava l'elettrodo in stufa a 110° C fino a peso costante.

Tutte queste operazioni lunghe e tediose devono essere condotte a termine con la massima cura per ottenere risultati attendibili.

Nella mancata osservanza di queste norme è da ricercare con tutta probabilità la causa di certi risultati poco concordanti e magari contraddittori ottenuti da taluni sperimentatori.

La fig. 3 mostra l'aspetto della superficie degli anodi dopo la prova.

Discussione dei risultati.

Pur riservandoci di inquadrare i risultati di queste esperienze in una discussione più generale, che faremo quando saranno raccolti tutti i dati delle altre prove in corso, riteniamo opportuno di fare qualche breve considerazione.

Anzitutto rileviamo che i dati della tabella II, pur non essendo raccolti in modo rigoroso al fine della valutazione dei rendimenti di corrente, indicano con sufficiente chiarezza il favorevole effetto della alta concentrazione dell'anolita. La cellula N. 1 fornisce infatti i rendimenti migliori.

Si constata anche l'aumento del rendimento di corrente col procedere del tempo come è da attendersi in conseguenza del progressivo intasamento dei diaframmi ed alla diminuzione delle perdite per diffusione.

I dati della tabella IV, e le fotografie della fig. 3 mostrano come il consumo cresce a misura che diminuisce la concentrazione dell'anolita. L'azione aggressiva dell'ione SO_4^{--}, è resa evidente dalla perdita che ha subito l'anodo corrispondente (8, 19 g), più che doppia di quella realizzata con l'anolita di eguale concentrazione, praticamente privo di solfati. È interessante però notare come l'anolita della cellula n° 3, poco concentrato, dia luogo ad un consumo non di molto inferiore (7, 98 g). Trascurabile risulta invece l'azione degli ioni ClO_3^-, in concordanza con quanto è noto sulla scarica anodica di questo ione e sul comportamento degli elettrodi di grafite nelle cellule per la fabbricazione dei clorati.

Ammettendo che l'attacco segua nel tempo con legge lineare, si hanno i seguenti valori di consumo in corrispondenza del passaggio di 100 Ao, e rispettivamente della produzione di 100 kg di NaOH con una resa del 95 % (7000 Ao).

1 2 3 4 5

Fig. 3.

TABELLA V

Cella	Perdite in g per	
	100 Ao	100 kg NaOH
1	0,58	38,6
2	1,19	83,3
3	1,45	101,5
4	1,49	104,3
5	0,62	43,4

Come si vede, i consumi sono oltremodo bassi e restano tali anche quando si tenga conto di tutte le maggiorazioni dovute a perdite pratiche di origine non elettrochimica (abbandono dei residui, rotture, ecc.). Si deve quindi ritenere che nella pratica il consumo cresca col graduale invecchiamento.

Resta però il favorevole risultato da noi ottenuto mantenendo alta la concentrazione anodica con la circolazione dell' anolita la quale deve avere effetto benefico anche per il rinnovo della soluzione che si trova ad immediato contatto dell' anodo.

È interessante a questo proposito ricordare i risultati di recente pubblicati da HEISE [13]) e secondo cui nella elettrolisi di soluzioni di cloruro sodico utilizzando anodi di carbone poroso ed alimentando la salamoia per effusione dell'interno dell'anodo, si consegue un minor consumo del 20 %.

Dobbiamo tuttavia ritenere che la circolazione da noi realizzata non era ancora sufficiente perchè l' eccesso di anolita abbandonava il compartimento anodico con una concentrazione sensibilmente più bassa della salamoia di alimentazione.

Non è da escludere che una circolazione più attiva avrebbe ancora ridotto i consumi.

Napoli — Istituto di Elettrochimica della R. Università. — settembre 1939 - XVII

---

[13]) HEISE G. W., Trans. Am. Eletrochem. Soc., 75 (1939), pp. 147-166.

I NUMERI ρ_α NEL NUOVO METODO PER LA GEOMETRIA DELLE SERIE LINEARI DELLE CURVE ALGEBRICHE

Nota del prof. **Federico Amodeo**, *presentata dal socio corrisp.* **G. Gallucci**

(Adunanza del dì 11 novembre 1939 - XVIII)

Sunto. — Scopo di questa Nota è di studiare le proprietà delle serie lineari segate sulle curve algebriche *singolari* C_p^m di qualunque ordine m e di qualunque genere p, cioè di quelle curve i cui punti doppi hanno un numero ρ di essi le cui posizioni dipendono dalle posizioni degli altri. Questo numero si indica con ρ_a quando la dipendenza è in relazione con la curva aggiunta di ordine $m-3-\alpha$. su cui essi si devono trovare. Una curva C_p^m ha tanti numeri ρ quante sono le curve aggiunte che essa possiede, da quella di ordine $m-4$ a quella di ordine minimo. Si studiano le variazioni simultanee di questi numeri, le loro relazioni con le dimensioni dei sistemi di curve aggiunte e alcuni teoremi sulle serie specializzate e confronti che ne derivano.

L'argomento che svolgiamo [1]) in questa Nota 2ª è attualmente, si può dire, ancora una novità, poichè sui numeri ρ_a si sa molto poco, per la ragione che finora con una persistenza unica più che rara non si è creduto utile dagli altri di inoltrarsi nella via dello studio delle curve di ordine minore di $m-3$ aggiunte alla curva fondamentale C_p^m di ordine m e di genere p. Ciò è provenuto dal pregiudizio. manifestato più volte [2]), che tale studio riusciva ozioso, in quanto che ogni curva $C^{m-2-\alpha}$ (α positivo) aggiunta alla C_p^m, con una C^α fissa del piano, costituisce una C^{m-3} aggiunta, cioè quella tale curva aggiunta che si presentò negli studî di RIEMANN sulle funzioni $F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})=0$ sotto la espressione della funzione

---

[1]) Questa Nota 2ª fa seguito ad un' altra Nota dal titolo: *Nuovo metodo per la Geometria delle serie lineari delle curve algebriche* (accolta il I.º dic. 1938 in questi Rendiconti, s. IV vol. IX, 1938-39).

[2]) Per esempio CLEBSCH nel vol. 3, p. 36 delle sue *Léçons sur la Géométrie* raccolte da LINDEMANN e tradotte in francese da BENOIST (Paris. 1879-83) dice: Il caso dell' ordine inferiore ad $m-3$ non ha bisogno di essere trattato di una maniera speciale; e a p. 142 del v. 2 aveva già detto: ogni sistema di curve di ordine meno elevato di $m-3$ puó essere portato all' ordine $m-3$ con l' aggiunta di una curva fissa.

razionale

$$\frac{\Phi\left(\overset{n-2}{s}, \overset{m-2}{z}\right)}{\frac{\partial F}{\partial s}}$$

e che ha la speciale preziosa proprietà di essere invariantiva nelle trasformazioni birazionali.

Il più interessante ed importante teorema trovato su questo numero ρ_α è (come si vedrà) quello del suo valore massimo,

$$\rho_\alpha \leq \frac{\alpha(m-3-\alpha)}{2},$$

che fu da me enunciato nel 1893. Questo valore massimo ed il teorema di CLIFFORD rappresentano (dopo il culminante teorema di RIEMANN-ROCH) i pilastri fondamentali della teoria; senza di essi non si può andare avanti.

La importanza del numero ρ_α del resto è evidente pel fatto che dai valori che esso può prendere dipende il valore della *dimensione* della seria *completa* segata dalle curve aggiunte $C^{m-3-\alpha}$, e ciò era giudicato ben difficile a trovarsi [1]).

La mancanza dello studio sistematico delle curve aggiunte alla C_p^m di qualunque ordine ha impedito che si imprendesse lo studio delle curve piane di ordine superiore al quinto o al sesto; mentre è elementarmente necessario di sapere che cosa avviene per le curve il cui ordine sorpassi per esempio il mille. Senza lo studio di queste curve aggiunte non si può sapere quel che succede nelle curve di grado elevatissimo, poichè le loro proprietà non hanno riscontro nelle proprietà (come si vede nel § 4) delle curve di grado limitato e si brancola nel buio. Invece la considerazione delle curve aggiunte di qualunque ordine permette di far penetrare agevolmente nella intricata foresta delle proprietà di tutte le curve di qualunque ordine, non solo, ma di respirarci con agio. Una novità ancora inesplorata è la variazione che può subire ρ_α tanto per sè stesso, quanto per rispetto alle variazioni di $\rho_{\alpha-1}$, $\rho_{\alpha-2}, \dots$, ecc. Già nella Mem. 9 del 1896 [2]), fu fatto un primo tentativo su queste variazioni, un secondo tentativo esporremo nel § 4 e ce ne resteranno ancora da fare. I nuovi caratteri delle curve che si rivelano in questo studio mancano completamente nelle curve iperellittiche o di gonalità 2, per cui sarebbe stato impossibile trovarle come generalizzazione di proprietà note. Ma della *gonalità* delle curve con una visione sintetica e nuova diremo in una Nota di prossima pubblicazione, che avrà per titolo: *Il problema della gonalità.*

---

[1]) KÜPPER, Prag. Abh. (7), III, 1889.

[2]) AMODEO, *Curve aggiunte e serie specializzate* (questi Rend. Acc. Napoli, 1896).

§ 1. Indipendenza e dipendenza dei punti doppi della C_p^m.

1. Nella precedente Nota si è parlato esclusivamente delle curve C_p^m dotate di soli punti doppi disposti nel piano in posizioni del tutto arbitrarie, in modo che nessuno di essi sia dipendente dalla posizione degli altri (curve *regolari* nel loro ordine) [1]. In questa 2ª Nota si parlerà delle curve C_p^m supposte dotate di soli punti doppi, situati in modo che la posizione di alcuni di essi sia dipendente dalla posizione di altri. Ciò importa che qui si debba parlare esclusivamente di curve aggiunte alla C_p^m di ordini minori di m-3, perchè per le curve aggiunte di ordini $\geq$ m-3, i punti doppi della C_p^m presentano sempre condizioni indipendenti alle curve che per essi passano semplicemente (cfr. teor. 3 del § 1 della 1ª Nota). Ma prima di tutto si deve ben stabilire che cosa s'intende per posizione di un punto *dipendente* da quello di altri.

Già si è adottato in Geometria di dire *indipendenti* 3 punti se non stanno per diritto; *indipendenti* 4 punti se non stanno nello stesso piano; 5 punti se non appartengono ad un S_3; ecc. ecc. Inoltre in Geometria proiettiva si sono detti indipendenti n punti di un piano, se di essi mai 3 stanno per diritto e danno luogo alla figura dell'*n-gono piano completo*.

Qui invece, tenendo conto che i punti doppi della C_p^m sono punti semplici per le curve aggiunte, bisogna precisare la *dipendenza* dei punti doppi della C_p^m, prima per rispetto ad una sua *retta aggiunta*, poi per rispetto ad una sua *conica aggiunta*, ad una sua *cubica aggiunta*, ecc. ecc., fino ad una sua curva aggiunta di ordine m-4. E si tenga conto, per chiarezza, che indicando (come nella citata Mem. 9) con ρ_α il numero delle condizioni di dipendenza dei punti doppi per rispetto alla $C^{m-3-\alpha}$ aggiunta, se poniamo $m-3-\alpha=\beta$, si ha $\alpha=m-3-\beta$, quindi, per rispetto alla C^β aggiunta, il numero ρ della rispettiva dipendenza si deve indicare con $\rho_{m-3-\beta}$, cioè col complemento di β ad $m-3$.

2. Se 3 o più punti doppi della C_p^m stanno su una retta si dirà che essi sono *dipendenti* dalla posizione di due soli fra essi; quindi, per rispetto alle rette aggiunte alla C_p^m, se i suoi d punti doppi stanno per diritto, essi rappresentano $d-2$ condizioni lineari di dipendenza da due soli di

---

[1]) Per una maggiore precisione di linguaggio chiameremo *curve regolari* nel loro ordine quelle che nella precedente Nota abbiamo chiamate *curve generali*.

essi e la *curva ha necessariamente una sola retta aggiunta.* E per essa

$$\rho_{m-3-1} = d - 2,$$

ciò implica che sia $m \geq 2d$ e > 4.

3. Rispetto alle coniche aggiunte alla C_p^m, se il numero dei punti doppi è ≤ 5 e di essi non più di 3 sono per diritto (come si vedrà più avanti) i detti punti doppi sono sempre indipendenti. Se invece è $d \geq 6$ questi punti doppi non sono più indipendenti quando la conica che passa per 5 di essi passa anche pel sesto o per gli altri rimanenti. In tal caso la C_p^m può avere soltanto una conica aggiunta e le condizieni di dipendenza dei d punti doppi sono date da $\rho_{m-3-2} = d - 5$ e intanto deve essere non solo $m > 5$, ma anche $2m \geq 2d$, cioè contemporaneamente $m \geq d$ e > 5.

4. Per rispetto alle cubiche aggiunte, se il numero d dei punti doppi è ≤ 9 e quattro non sono per diritto (come si vedrà) essi sono indipendenti. Ma se è invece $d > 9$ e la cubica che passa per 9 di essi, passa anche per i rimanenti, nel qual caso la C_p^m possiede una sola cubica agg., le condizioni di *dipendenza* dei d punti doppi sono dati da $\rho_{m-3-3} = d - 9$ e intanto deve essere $m > 6$ e dippiù $3m \geq 2d$ e quindi contemporaneamente

$$m \geq \frac{2d}{3} \quad \text{e} \quad > 6.$$

5. In generale per rispetto alla C^β aggiunta, se il numero dei punti doppi è $d > \frac{\beta(\beta+3)}{2}$ con la restrizioni opportune si avrà

$$\rho_{m-3-\beta} = d - \frac{\beta(\beta+3)}{2} \quad \text{e contemporaneameote} \quad m > 3 + \beta \ \text{e} \geq \frac{2d}{\beta}.$$

6. Un più minuto esame sulla dipendenza dei punti doppi della C_p^m faremo nel § 3.

Però occorre notare fin da ora che una curva algebrica C_p^m, per la quale un numero ρ_α ($\alpha > 0$) sia maggiore di zero, non può essere *regolare* nel suo ordine. I coefficienti della sua equazione debbono soddisfare a speciali condizioni; e perciò queste curve appartengono a quella categoria di curve che da altro tempo abbiamo dette *curve singolari* nel loro ordine.

§ 2 Valori di N_α, R_α, $N_\alpha - R_\alpha$, $N_\alpha - 2R_\alpha$, N_α / R_α.

1, Occorre rifare il cammino seguito nella Nota 1ª (già citata) partendo dalla curva C_π^m di masssimo genere (necessariamente regolare) e passare da essa alle curve C_p^m di generi minori, tenendo conto della *dipen-*

denza che possono avere i punti doppi che si fanno acquistare man mano alla curva fondamentale per diminuirne il genere. Ricordiamo che ci limitiamo alla considerazione delle curve aggiunte di ordine $< m - 3$; cioè delle curve agg. $C^{m-3-\alpha}$ con α positivo (§ 1, n. 1).

Quando si passa da C^m_π ad una C^m_p di genere minore la dimensione R_α della serie completa $g^{R_\alpha}_{N_\alpha}$ segata dalle $C^{m-3-\alpha}$ agg. diminuisce di una unità, se la posizione di ogni punto doppio che la curva acquista, per rispetto a questa curva agg., è indipendente dalle posizioni dei punti precedenti; ma non diminuisce affatto se la posizione di un nuovo punto doppio è *dipendente* da quelle dei precedenti, cosichè la dimensione di R_α al crescere dei punti doppi diminuisce soltanto di $d - \rho_\alpha$ unità. Quindi:

$$R_\alpha = \frac{1}{2}(m - 3 - \alpha)(m - \alpha) - (d - \rho_\alpha) \tag{1}$$

Invece l'ordine N_α della serie canonica $(\alpha+1)$esima diminuisce sempre di due unità per ogni punto doppio che la curva C^m acquista e perciò si ha sempre:

$$N_\alpha = m(m - 3 - \alpha) - 2d\,, \tag{2}$$

Qualora occorra indicare la curva agg. col suo ordine C^β queste due formole divengono:

$$(1') \quad R_{m-3-\beta} = \frac{1}{2}\beta(\beta + 3) - (d - \rho_{m-3-\beta}) \quad , \quad (2') \quad N_{m-3-\beta} = m\beta - 2d$$

Dalle due formole (1) e (2) si ha:

$$N_\alpha - R_\alpha = \frac{1}{2}(m - 3 - \alpha)(m + \alpha) - (d + \rho_\alpha) \tag{3}$$

$$N_\alpha - 2R_\alpha = \alpha(m - 3 - \alpha) - 2\rho_\alpha\,. \tag{4}$$

Introducendo nelle precedenti formole il genere p della curva si ha:

$$R_\alpha = p - 1 - m\alpha + \frac{\alpha(\alpha + 3)}{2} + \rho_\alpha \tag{5}$$

$$N_\alpha = 2(p - 1) - m\alpha \tag{6}$$

$$N_\alpha - R_\alpha = p - 1 - \left(\frac{\alpha(\alpha + 3)}{2} + \rho_\alpha\right) = p - \frac{1}{2}(\alpha + 1)(\alpha + 3) - \rho_\alpha\,. \tag{7}$$

La differenza $N_\alpha - 2R_\alpha$ è identica alla (4) perchè indipendente dal genere.

2. Intanto è noto dal teorema di CLIFFORD in *Classification of Loci* (Phyl. Trans. v. 169, 1878, p. 681) che per serie speciali (quindi $\alpha \geq 0$) è

sempre $$N_\alpha \geq 2R_\alpha$$

(qui non facciamo ancora nessuna distinzione fra il segno $=$ e il segno $>$)[1] quindi paragonando con la (4) si ha:

$$\rho_\alpha \leq \frac{1}{2}\alpha(m-3-\alpha). \tag{8}$$

Questa formola, pubblicata da me la prima volta nel 1893 nella Mem. 4 (*Curve aggiunte minime*, Rend. Lincei 1893 p. 460-467) fu messa in dubbio nel 1894 da BERTINI, a p. 14 della Mem. quì sotto citata, adducendo che ρ_α non poteva raggiungere il valore massimo. Anche BURKHARDT seguì il giudizio di BERTINI nel farne la recensione nello *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathem.*[2]); però dietro mia lettera si ricredette e dichiarò che ρ poteva raggiungere il suo massimo nella Nota: *Zûr Teorie der linearen Schaaren von Punktaggregaten auf algebr. Curven.* Nachr. d. k. G. d. w. zu Gottingen, 21-11-1896.

La formula (8) dice che il valore massimo di ρ_α è eguale al prodotto dell'ordine della curva aggiunta per α. Questo massimo è raggiunto sempre quando m è pari ed è raggiunto per m dispari quando α è pari (e se ne mostreranno numerosissimi esempii).

Per brevità si indicherà con δ_α il nemero $\frac{1}{2}\alpha(m-3-\alpha)$ e quindi la (8) si scrive brevemente

$$\rho_\alpha \leq \delta_\alpha. \tag{8'}$$

Con ciò le formole (1) (2) (4) si possono scrivere

$$R_\alpha = \frac{N_\alpha}{2} - (\delta_\alpha - \rho_\alpha) \tag{9}$$

$$N_\alpha - R_\alpha = \frac{N_\alpha}{2} + (\delta_\alpha - \rho_\alpha) \tag{10}$$

$$N_\alpha - 2R_\alpha = 2(\delta_\alpha - \rho_\alpha). \tag{10'}$$

---

[1]) Per sifatta distinzione si cfr. BERTINI, *La geometria delle serie lineari*, Ann. di Mat. v. 22, 1894, p. 1-30. — SEVERI, *Trattato di Geometria algebrica*, p. 159 e il n. 10 che qui segue.

[2]) Vol. 25, 1896, p. 1091.

3. Al valore massimo di ρ_α corrisponde un valore minimo pel genere della curva C_p^m dato da

$$(11) \qquad p \geq \frac{m\alpha}{2} + 1 .$$

Questo valore fu da me esposto nella stessa Mem. 4 citata e nella Mem. 5 (*Serie residue nella serie canonica della* $C^{m-3-\alpha}$, Rend. Lincei V. 2. 1893 p. 528-532) e fu pure ritenuto dubbio, poi riconosciuto esatto. Ad esso possiamo adesso agevolmente pervenire osservando [1]) che per la esistenza della curva agg. $C^{m-3-\alpha}$ deve essere $R_\alpha \geq 0$, quindi per la (9) deve essere $\frac{N_\alpha}{2} - (\delta_\alpha - \rho_\alpha) \geq 0$,

da cui si ricava $$p \geq \frac{\alpha m}{2} + 1 + (\delta_\alpha - \rho_\alpha)$$

e quindi si precisa che il valore di p varia fra il minimo assoluto $p_a = \frac{\alpha m}{2} + 1$ e il minimo relativo $p_r = \frac{\alpha m}{2} + 1 + \delta_\alpha$ e quindi:

Il minimo genere pel quale la curva C_p^m *possa avere curve agg.* $C^{m-3-\alpha}$ *di ordine* $m-3-\alpha$ *è* $p = \frac{\alpha m}{2} + 1$, *se* αm *è pari, oppure* p *eguale all'intero prossimamente superiore ad* $\frac{\alpha m}{2} + 1$, *se* αm *é dispari. Le curve di questo genere hanno una sola* $C^{m-3-\alpha}$ *che non sega la curva* C_p^m *fuori dei punti multipli, se* αm *è pari, oppure sega la curva* C_p^m *in un sol punto fisso, se* αm *è dispari.*

4. Qualche considerazione occorre qui inserire per le serie complete segate da una parte, non da tutto il sistema delle curve $C^{m-3-\alpha}$. Per la $(\alpha+1)$esima serie canonica $g_{N_\alpha}^{R_\alpha}$, segata da tutte le curve agg. $C^{m-3-\alpha}$, abbiamo trovato (formola (7))

$$N_\alpha - R_\alpha = p - 1 - \left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho_\alpha\right)$$

Ora aggiungiamo che:

Per ogni altra serie completa $g_{n_\alpha}^{r_\alpha}$ *segata da curve* $C^{m-3-\alpha}$ *deve essere* $n_\alpha - r_\alpha \leq N_\alpha - R_\alpha$.

Infatti, se facciamo passare le $C^{m-3-\alpha}$ per uno o più punti fissi generici della C_p^m (fra loro indipendenti) la dimensione R_α diminuisce di una unità per ognuno di essi e l'ordine N_α parimenti diminuisce di una unità,

---

[1]) Cfr. pure Mem. 9 *Curva agg. e serie specializzate*, p. 15-17 (1896), § 14.

quindi la serie segata dalle $C^{m-3-\alpha}$ che passano per h punti fissi generici è una $g_{n_\alpha}^{r_\alpha}$ anche completa per la quale

$$n_\alpha - r_\alpha = N_\alpha - R_\alpha .$$

Ma se i punti fissi non sono tutti indipendenti e invece t fra essi sono conseguenza del passaggio delle $C^{m-3-\alpha}$ per gli altri $h-t$ punti, questi non fanno perdere alcuna unità alla dimensione R_α; perciò mentre N_α diminuisce di h unità, R_α diminuisce soltanto di $h-t$ unità e si ha

$$n'_\alpha - r'_\alpha = (N_\alpha - h) - (R_\alpha - h + t) = N_\alpha - R_\alpha - t$$

e perciò

$$n'_\alpha - r'_\alpha < N_\alpha - R_\alpha .$$

5. Il reciproco della proposizione precedente è vero soltanto nel caso che sia $\alpha = 0$.

Infatti, per $\alpha = 0$, $N_0 - R_0 = p - 1$, quindi il teorema è vero per una serie di dimensione zero, poichè in tal caso $n \leq p - 1$ dice che il numero dei punti dell'unico gruppo che la costituisce è al più eguale a quello che basta a individuare la C^{m-3}. E poiché, supposto il teorema vero per una g_n^r, già esistente sulla C_p^m, esso è vero per una g_{n+1}^{r+1}, ne risulta che essendo vero per la g^0_{n-r} è vero per la g^1_{n+1-r}, per la g^2_{n+2-r}, ecc., e quindi è vero per la g_n^r.

Ma quando vogliamo passare alle curve $C^{m-3-\alpha}$ non possiamo dire che il teorema è vero per la g^0_n, poichè dato

$$n - 0 \leq p - 1 - \left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho_\alpha\right)$$

dovrebbe essere $N_\alpha - R_\alpha \leq R_\alpha$ e quindi

$$N_\alpha \leq 2 R_\alpha ,$$

formola che è vera soltanto per α negativo o nullo.

Quindi per estendere il teorema alle $C^{m-3-\alpha}$ dobbiamo porre la condizione

$$n - r \leq R_\alpha$$

e si ha, con ragionamento identico a quello usato sopra, il teorema reciproco così:

Soltanto quando $n - r \leq R_\alpha$ *la serie* g_n^r *esistente sulla* C_p^m *è segata certamente da un sistema di curve aggiunte di ordine* $m - 3 - \alpha$ (cfr. Mem. 4, p. 531-32). E da ciò:

Il concetto di serie specializzata $(\alpha + 1)$ volte è identico a quello di

$$n - r \leq p - 1 - m\alpha + \left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2} + \rho_\alpha\right).$$

6. Il rapporto dell' ordine alla dimensione delle serie lineari complete segate sulle curve C_p^m singolari dalle $C^{m-3-\alpha}$ aggiunte prende la forma

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} = 2\,\frac{m(m-3-\alpha) - 2d}{m(m-3-\alpha)(m-\alpha) - 2(d-\rho_\alpha)} = 2\,\frac{m - \dfrac{2d}{m-3-\alpha}}{m - \alpha - \dfrac{2d}{m-3-\alpha} + \dfrac{2\rho_\alpha}{m-3-\alpha}}$$

e posto $\dfrac{2d}{m-3-\alpha} = \nu$ diviene

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} = 2\,\frac{m-\nu}{m - \nu - \alpha + \dfrac{2\rho_\alpha}{m-3-\alpha}}$$

Per α negativo o nullo è sempre $\rho_\alpha = 0$ e si ricade nei teoremi esposti nella Nota precedente cioè:

$N/R < 2$ per curve agg. di ordine $m-2$, $m-1$,
$N/R = 2$ » » » » » $m-3$.

Siccome le *curve iperellittiche* hanno per curve aggiunte minime le curve C^{m-3} [1]), ne risulta che:

Anche per le curve iperellittiche il rapporto $N/R = 2$.

7. Resta da esaminare il caso di α positivo, cioè il valore del rapporto N/R per le serie segate da tutti i sistemi di curve agg. di ordine minore di $m-3$.

In questo caso $$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} = 2\,\frac{m-\nu}{m - \nu - \dfrac{\alpha(m-3-\alpha) - 2\rho_\alpha}{m-3-\alpha}}$$

e poichè la differenza $\alpha(m-3-\alpha) - 2\rho_\alpha = 2(\delta_\alpha - \rho_\alpha)$ è sempre ≥ 0 ri-

[1]) AMODEO, Mem. 6, *Curve K-gonali*, Ann. di Mat. v. 21, 1893, § 4.

sulta che

$$\frac{N_\alpha}{R_\alpha} \geq 2 .$$

Il segno di eguaglianza si ha soltanto quando $\rho_\alpha = \delta_\alpha$.

Ma quando ρ_α raggiunge il valore massimo δ_α la serie segata dalle $C^{m-3-\alpha}$ si presenta per m pari sotto la forma g_0^0 e per m dispari sotto la forma g_1^0, cioè il rapporto si presenta sotto forma indeterminata; perciò in tal caso conviene applicare la formola (4) o la (10'), $N_\alpha = 2R_\alpha + 2(\delta_\alpha - \rho_\alpha)$ e si conferma che $N_\alpha > 2R_\alpha$, eccetto nel caso estremo di ρ_α massimo nel quale ordine e dimensione sono entrambe zero. Così il tanto tormentato teorema di CLIFFORD, che finora era messo sotto una forma complicata [1]), prende la sua forma precisa e semplice:

Il rapporto N/R è maggiore di 2 per le serie canoniche segate dalle curve aggiunte di ordine minore di $m-3$ eccetto nel caso in cui la serie si presenta sotto la forma g_0^0.

8. Per illustrare convenientemente questo enunciato è meglio riferirsi a curve di ordine elevato. Prendiamo come esempio le curve C^{18} di ordine 18. Queste possono avere rette aggiunte C^1, per le quali $\alpha = 14$, $\delta_\alpha = 7$. Indicando con d i punti doppi che possono avere per diritto si ha:

Per $d = 1$ la serie segata è g_{16}^1, $R_{14} = 1$, $N_{14} = 2R_{14} + 2(7-0) = 16$

$d = 2$ » » » » g_{14}^0, $R_{14} = 0$, $N_{14} = 2R_{14} + 2(7-0) = 14$

$d = 3$ » » » » g_{12}^0, $R_{14} = 0$, $N_{14} = 2R_{14} + 2(7-1) = 12$

. . . .

$d = 9$ » » » » g_0^0, $R_{14} = 0$, $N_{14} = 2R_{14} + 2(7-7) = 0$.

E se guardiamo alle *coniche* aggiunte: $\alpha = 13$, $\delta_{13} = 13$ e quindi

per $d = 10$ la serie segata è g_{16}^0, $R_{13} = 0$, $N_{13} = 2R_{13} + 2(13-5) = 16$

$d = 18$ » » » » g_0^0, $R_{13} = 0$, $N_{13} = 2R_{13} + 0 = 0$

E così per le *cubiche, quartiche,* ecc. ecc. fino alla C^{14} agg. sempre è $N_\alpha > 2R_\alpha$ ovvero $N_\alpha / R_\alpha > 2$, eccetto il caso in cui N ed R sono nulli entrambi.

---

[1]) Confrontare con SEGRE, l. c. p. 127. — BERTINI, l. c. p. 25. — SEVERI, *Geom. Alg.* p. 160-161.

§ 3. Variazioni di ρ_α.

1. Nel § 1 abbiamo constatato la variabilità di ρ_α per ogni valore di α positivo. Per approfondire l'argomento troviamo utile farlo mediante esempi e scegliamo le curve C^{10} di ordine 10_s i cui generi variano da 0 a 36, se ci limitiamo alle curve irriducibili, come di solito.

Rispetto alle curve C^{10} le curve agg. $C^{m-3-\alpha}$ corrispondono ai seguenti valori di

$$\alpha = 1 \;,\; 2 \;,\; 3 \;,\; 4 \;,\; 5 \;,\; 6$$

ai quali corrispondono i valori massimi di ρ_α

$$\delta_\alpha = 3 \;,\; 5 \;,\; 6 \;,\; 6 \;,\; 5 \;,\; 3$$

Osserviamo anzitutto che i valori estremi di δ_α e quelli egualmente lontani dagli estremi sono eguali, per essere il prodotto $\alpha(m-3-\alpha)$ formato da due fattori di somma costante.

2. Al valore di $\alpha = 6$ corrisponde $\delta_6 = 3$, e ciò significa che per le *rette* aggiunte alle curve C^{10} il numero dei punti doppi che dipendono dai precedenti può essere al massimo 3, se essi stanno per diritto. Dunque le curve C^{10} dai generi

$$36 \;,\; 35 \;,\; 34 \;,\; 33 \;,\; 32 \;,\; 31$$

cioè provviste rispettivamente di punti doppi in numero di

$$0 \;,\; 1 \;,\; 2 \;,\; 3 \;,\; 4 \;,\; 5$$

hanno una sola retta aggiunta a cominciare dalla C^{10}_{34} se essi sono per diritto

e per la curva C^{10}_{33} si ha $\rho_6 = 1$

» » » C^{10}_{32} » » $\rho_6 = 2$

» » » C^{10}_{31} » » $\rho_6 = 3$.

E su queste curve l'unica retta aggiunta sega rispettivamente una serie

$$g^0_4 \;,\; g^0_2 \;,\; g^0_0 \;;$$

cioè un gruppo di 4 , 2 , 0 punti fissi.

Le prime curve C^{10}_{36} , C^{10}_{35} , C^{10}_{34} sono curve *regolari*, le ultime sono *curve singolari* nel loro ordine, e in conformità della formola $p \geqq \frac{\alpha m}{2} + 1$, hanno $p \geqq 31$ [1]).

3. Per le *coniche* aggiunte si hanno $\alpha = 5$, $\delta_5 = 5$, $p \geqq 26$, quindi le curve C^{10} dai generi

	30 ,	29 ,	28 ,	27 ,	26	
se hanno	6 ,	7 ,	8 ,	9 ,	10	punti doppi situati

[1]) Con queste si hanno altri esempii di verifica del teorema di CLIFFORD.

su una conica (o su due rette) hanno una sola conica aggiunta che segherà rispettivamente le serie

$$g_8^0 \quad , \quad g_6^0 \quad , \quad g_4^0 \quad , \quad g_2^0 \quad , \quad g_0^0$$

e ad esse corrispondono rispettivamente i valori di

$$\rho_5 = 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 4 \quad , \quad 5$$

Queste curve sono singolari nel loro ordine.

4. Per le *cubiche* aggiunte, $\alpha = 4$, $\delta_4 = 6$, $p \geq 21$, e quindi delle C^{10} dai generi

26 , 25 , 24 , 23 , 22 , 21

i punti doppi in numero di

10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15

devono appartenere ad una cubica, la quale sega sulle dette curve C^{10} rispettivamente le serie

$$g_{10}^0 \quad , \quad g_8^0 \quad , \quad g_6^0 \quad , \quad g_4^0 \quad , \quad g_2^0 \quad , \quad g_0^0$$

e corrispondono ai valori di

$$\rho_4 = 1 \quad , \quad 2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 4 \quad , \quad 5 \quad , \quad 6.$$

5. Così per le *quartiche* agg. si ha: $\alpha = 3$, $\delta_3 = 6$, $p \geq 16$ e quindi delle C^{10} dai generi 21 , 20 , 19 , 18 , 17 , 16
i punti doppi che sono 15 , 16 , 17 , 18 , 19 , 20
devono appartenere ad una quartica che sega sulle C^{10} rispettivamente le serie g_{10}^0 , g_8^0 , g_6^0 , g_4^0 , g_2^0 , g_1^0
corrispondenti ai valori di $\rho_3 = 1$, 2 , 3 , 4 , 5 , 6.

6. Così per le *quintiche* aggiunte, $\alpha = 2$, $\delta_2 = 5$, $p \geq 11$ e quindi delle curve C^{10} dai generi 15 , 14 , 13 , 12 , 11
i punti doppi in numero di 21 , 22 , 23 , 24 , 25
devono appartenere ad una quintica che sega sulla C^{10} rispettivamente le serie g_8^0 , g_6^0 , g_4^0 , g_2^0 , g_0^0
corrispondenti ai valori di $\rho_2 = 1$, 2 , 3 , 4 , 5.

7. Infine per le *sestiche* agg. , $\alpha = 1$, $\delta_1 = 3$, $p \geq 6$
e quindi delle C^{10} dai generi 10 , 9 , 8 , 7 , 6
i punti doppi che sono 26 , 27 , 28 , 29 , 30
devono appartenere ad una sestica che è unica per le C_8^{10} , C_7^{10} , C_6^{10}
e vi sega rispettivamente una g_4^0 , g_2^0 , g_6^0
corrispondente ai valori di $\rho_1 = 1$, 2 , 3.

8. I valori di δ_α al crescere di α divengono sempre più grandi, e, senza arrivare a curve di ordini 100 o 1000, basta fermarsi alle curve di

ordine 18 che possono avere da 0 a 136 punti doppi, per vedere che ai valori di

$\alpha = 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ ,\ 4\ ,\ 5\ ,\ 6\ ,\ 7\ ,\ 8\ ,\ 9\ ,10\ ,11\ ,12\ ,13\ ,14$

corrispondono i valori di

$\delta_\alpha = 7\ ,\ 13\ ,\ 18\ ,\ 22\ ,\ 25\ ,\ 27\ ,\ 28\ ,\ 28\ ,\ 27\ ,\ 25\ ,\ 22\ ,\ 18\ ,\ 13\ ,\ 7$

Dal valore di $\delta_{14} = 7$ deduciamo che la curva C^{18} può avere da 3 a 9 punti doppi per diritto. Nel caso ultimo la curva possiede *nove* g^1_{16}, mentre la C^{18}_{135} ne possiede una.

Le 9 g^1_{16} costituiscono serie parziali, segate da rette, che appartengono alla serie completa g^{45}_{144} segata da C^9 aggiunte.

Il massimo $\delta_{13} = 13$ significa che la curva C^{18} può avere fino a 13 punti doppi sopra l'unica *conica* aggiunta che è individuata da 5 soltanto fra essi e questa sega rispettivamente le dette curve con le serie

$$g^0_{14}\ ,\ g^0_{12}\ ,\ g^0_{10}\ ,\ g^0_8\ ,\ g^0_6\ ,\ g^0_4\ ,\ g^0_2\ ,\ g^0_0$$

cioè in gruppi di punti fissi che diminuiscono da 14 a 0.

E così continuando.

9. Nelle curve di ordine dispari non sempre si trovano serie g^0_0. Così per le curve C^9 le *rette* aggiunte sono date da $\alpha = 5$, $\delta_5 = 2\,{}^1/_2$ e perciò ρ_5 può raggiungere soltanto il valore 2; ciò significa che la C^9_{24} di genere 24 e quindi con 4 p. doppi, se ha i suoi 4 p. doppi per diritto, ha una sola retta agg. che sega ulteriormente la curva in un punto fisso.

Nel qual caso le *coniche* aggiunte alla C^9_{24} invece di segare una g^1_{16} segheranno una g^2_{10} costituita dalla serie segata dalle rette del piano g^2_3 e dal punto fisso determinato dall' unica retta aggiunta.

§ 4. Variazioni simultanee di $\rho_\alpha \cdot \rho_{\alpha-1}, \rho_{\alpha-2}$ ecc.

1. Non è sufficiente esaminare soltanto le variazioni che subisce ρ_α per se solo; occorre tener presente le variazioni che esso subisce in relazione a $\rho_{\alpha-1} \cdot \rho_{\alpha-2}$, ecc. Ciò faremo ricominciando ad esaminare l'influenza che può avere l'esistenza dei punti doppi per diritto sulla dipendenza di quelli relativi alla conica aggiunta, e quella della conica relativamente a quelli delle cubiche aggiunte, e così via.

Però occorre premettere che i valori di ρ_α non hanno importanza per le curve fondamentali C^m di ordini 2, 3, 4, per mancanza in queste di curve aggiunte di ordini $< m - 3$, Nè hanno influenza nelle curve C^5 di ordine 5, perchè in queste curve non si possono avere punti doppi per diritto in numero maggiore di 2; ed in esse le *coniche* aggiunte segano la prima serie canonica. Nè hanno influenza sulle C^6 e sulle C^7, perchè tre punti

doppi per diritto fanno soltanto spezzare le coniche aggiunte in due rette, ma non creano un ρ diverso da zero per esse; e similmente 6 punti doppi su una conica fanno soltanto spezzare la cubica agg. in una conica e una retta; come 10 p. doppi su una cubica spezzano la quartica agg. senza influire sui rispettivi numeri ρ

Il fenomeno comincia dunque ad avere influenza sui ρ per le C^8, perchè 4 punti doppi per diritto (nel qual caso $\rho_4=2$) fanno aumentare ρ_3 da 0 ad 1; e 7 punti doppi su una conica fanno aumentare di una unità ρ_4. Egualmente per le C^9.

2. L'interesse comincia effettivamente dalle C^{10} in poi, per le quali fino a 5 punti doppi per diritto abbiamo C^1 agg. con $\rho_6=1, 2, 3$; fino a 10 p. doppi su una conica abbiamo C^2 agg. con $\rho_5=1, 2, 3, 4, 5$; fino a 15 p. doppi su una cubica abbiamo C^3 agg. con $\rho_4=1, 2, 3, 4, 5, 6$; fino a 20 p. doppi su una quartica abbiamo C^4 agg. con $\rho_3=1, 2, 3, 4, 5, 6$; fino a 25 p. doppi su una quintica abbiamo C^5 agg. con $\rho_2=1, 2, 3, 4, 5$; fino a 30 p. doppi su una sestica abbiamo C^6 agg. con $\rho_1=1, 2, 3$.

Più particolarmente:

a) Se 3 punti doppi A, B, C stanno per diritto $\rho_6=1$, ma in riguardo alle C^2 agg. i punti A, B, C fanno spezzare le coniche agg. in due rette senza influire su ρ_5 che resta ancora zero. La serie segata dalle C^2 agg. è una $g^2_{14}=g^2_{10}+g^0_4$, cioè formata dalla serie segata dalle rette del piano e dai quattro punti fissi determinati sulla C^{10} dalla retta aggiunta ABC.

b) Se quattro punti doppi A, B, C, D stanno per diritto $\rho_6=2$, ma questi per rispetto alle C^2 agg. fanno diventare $\rho_5=1$, invece di 0, perchè sono sempre ∞^2 le rette che insieme alla retta AB costituiscono le C^2 agg. e queste invece di segare una g^1_{12} segano una $g^2_{12}=g^2_{10}+g^0_2$; cioè la serie formata dalle rette del piano e dai due punti fissi della C^{10} determinati dalla retta agg. $ABCD$.

c) Se 5 punti doppi A, B, C, D, E stanno per diritto $\rho_6=3$ e $\rho_5=2$, invece di 0, poichè le C^2 agg. sono ancora ∞^2 e segano una g^2_{10} senza punti fissi (invece di segare una g^0_{10}).

d) Se oltre i 5 p. doppi A, B, C, D, E per diritto, la curva C^{10} ha ancora un p. doppio P, oppure due p. doppi P, Q esterni ad AB, questi fanno rimanere $\rho_5=2$, mentre le C^2 agg. segano rispettivamente una g^1_8 o una g^0_6. Se poi altri punti doppi R, S, T si aggiungono per diritto con P e Q, ρ_5 assume i valori 3, 4, 5 e le coniche agg. segheranno rispettivamente le serie g^0_4, g^0_2, g^0_0.

3. Passiamo alle considerazioni simultanee di ρ_6, ρ_5, ρ_4 considerando le C^3 aggiunte alla C^{10} ed il relativo numero $\rho_4 \leq 6$.

a) Se 4 punti doppi A, B, C, D stanno per diritto, la C^3 agg. si spezza in una retta ed una conica del piano, e quindi la serie segata è una $g^5_{22} = g^5_{20} + g^0_2$ e resta $\rho_4 = 0$.

b) Se 5 punti doppi A, B, C, D, E stanno per diritto, le C^3 agg., già spezzate nella retta AB ed in una conica generica del piano, invece di segare una g^4_{20} segano una g^5_{20}, quindi $\rho_4 = 1$, invece di zero.

c) Se, oltre ai 5 p. d. per diritto, la curva C^{10} acquista un punto doppio P o due punti doppi P, Q, essendo questi indipendenti dai precedenti, fanno diminuire regolarmente di una o due unità la dimensione della serie e resta $\rho_4 = 1$.

Per un terzo p. doppio R per diritto con PQ la conica si spezza nella retta PQR ed in una qualunque retta del piano e le C^3 agg. segano una $g^2_{14} = g^2_{10} + g^0_4$ invece della g^1_{14} regolare e resto $\rho_4 = 1$.

Per un altro punto doppio S sulla retta PQR la serie segata della C^3 agg. resta quella delle rette del piano, una g^2_{12} quindi $\rho_4 = 2$.

Per un quinto p. doppio T su $PQRS$ la serie resta di dimensione 2, è una g^2_{10} e quindi $\rho_4 = 3$.

d) Se la curva C^{10} acquista un punto doppio X o due punti doppi X, Y fuori delle rette AB, PQ, essendo questi indipendenti dai precedenti, resta $\rho_4 = 3$.

Se inoltre altri 3 punti doppi Z, U, V si aggiungono per diritto con XY, la serie segata si riduce a g^0_4 , g^0_2 , g^0_0 e ρ_4 passa ai valori 4, 5, 6.

4. Passiamo alle C^4 agg. alle curve C^{10}, ed al relativo $\rho_3 \leq 6$.

a) Soltanto se 5 p. doppi sono per diritto la C^4 agg. si spezza in una retta e una cubica del piano, e tutte segano come regolare una g^9_{30} e quindi $\rho_3 = 0$.

b) Se altri 4 punti doppi stanno su un' altra retta anche la C^3 si spezza in una retta e una conica generica del piano che tutte segano una g^5_{22} regolare.

Se invece un 5° p. doppio si accresce sulla seconda retta, le coniche del piano segano una g^5_{20} invece di una g^4_{20} e $\rho_3 = 1$.

c) Se, oltre a questi, altri 3 punti doppi stanno su una terza retta, la conica si spezza nella retta e in una qualunque retta del piano, e tutte segano una g^2_{14} invece di una g^1_{14} e $\rho_3 = 1$.

Se invece un quarto e poi un quinto punto doppio si aggiunge su questa retta, la serie segata dalle rette del piano si riduce prima a g^1_{12} poi a g^0_{10} e si ha $\rho_3 = 2$, 3.

d) Se infine, oltre i 15 p. doppi su tre rette, si aggiungono 2 p. doppi fuori di queste, resta $\rho_3 = 3$; e poi per altri 3 p. doppi acquisiti dalla C^{10} su questa retta diviene $\rho_3 = 4, 5, 6$.

5. Per riguardo alle C^5 agg., ed al relativo $\rho_2 \leqq 5$, non essendovi spezzamenti per 5 punti doppi per diritto si rientra nel caso generale per cui ρ_2 prende i valori 1, 2, 3, 4, 5 quando i p. doppi oltre i 20 appartengono ad una medesima C^5 agg.

Analoga osservazione per la C^6 agg. ed al relativo $\rho_1 \leqq 3$.

6. Riepilogando in riguardo alle C^{10}:

Per le C^2 agg, 3 p. d. per diritto spezzano la curva in 2 rette
4 » » » fanno acquistare una unità a ρ_5, $\rho_5 = 1$
5 » » » » » 2 » a ρ_5, $\rho_5 = 2$
degli altri 5 p. d. 2 fanno diminuire la dim. e non alterano ρ_5
3 fanno acquistare a ρ_5 i valori 3, 4, 5.

Per le C^3 agg. 4 p. d. per diritto spezzano la curva in retta e conica
5 » » » fanno divenire $\rho_4 = 1$
degli altri punti doppi 3 per diritto spezzano la conica in rette
4 » » fanno divenire $\rho_4 = 2$
5 » » » » $\rho_4 = 3$
degli altri 5 punti doppi 2 fanno diminuire la dimensione
3 fanno divenire $\rho_4 = 4, 5, 6$.

Per le C^4 agg. 5 p. d. per diritto spezzano la C^4 in retta e C^3
e per gli altri 15 p. doppi si ripete come per le C^3 agg.

Per le C^5 e per le C^6 agg. si rientra nel caso generale.

7. Più semplice e meno comprensivo sarebbe stato l'esame analogo per le curve C^8 e C^9.

Invece un esame più convincente e comprensivo si può fare sulle curve C^{18} del 18° ordine.

a) Le curve C^{18} fino a che posseggono non più di 9 punti doppi, se questi sono per diritto, hanno rette, C^1, aggiunte e il relativo ρ_{14} può prendere i valori $\rho_{14} = 1, 2, \ldots, 7$.

b) Oltre il 9° punto doppio la C^{18} non ha rette aggiunte; funzionano come curve aggiunte minime le C^2, il cui $\rho_{13} \leqq 13$ e ciò fino al 18° p. doppio. Ma se non ci fossero punti doppi per diritto, soltanto dal 6° p. doppio sulla conica dei primi cinque si avrebbe $\rho_{13} = 1$, e poi aumenterebbe di una unità per ogni altro p. doppio situato sulla stessa conica.

Invece se 3 p. doppi stanno per diritto la C^2 agg. si spezza in due rette, e con 4 p. doppi allineati si ha $\rho_{13} = 1$ e con 5, 6, 7, 8, 9 p. doppi allineati diviene $\rho_{13} = 2, 3, 4, 5, 6$ [1]).

---

[1]) Interessa notare che: se, dei 12 p. doppi, sono distribuiti su due rette 8 e 4; 7 e 5; 6 e 6, il valore di ρ_{13} resta inalterato.

Per i rimanenti 9 punti doppi, due di essi fanno diminuire la dimensione della serie segata, i rimanenti 7 fanno crescere ρ_{13} da 7 a 13.

c) Oltre il 18° p. doppio la curva non ha più C^4 agg., funzionano come curve aggiunte minime le C^5 agg. di cui $\rho_{12} \leq 18$.

Se non ci sono punti doppi per diritto, ρ_{12} diviene eguale a 1 qualora 10 p. d. stiano su una cubica, o qualora 7 p. d. stiano su una conica; ma se vi sono 4 p. doppi per diritto le C^3 agg. si spezzano in retta e C^2 ed allora 5, 6, 7, 8, 9 punti doppi per diritto fanno $\rho_{12} = 1, 2, 3, 4, 5$.

Se di altri punti doppi 3 stanno su un' altra retta le C^2 si spezzano e per altri 4, 5, 6, 7, 8, 9 per diritto diviene $\rho_{12} = 6, 7, 8, 9, 10, 11$.

Se 2 di altri 9 p. doppi si assegnano fuori delle prime rette, la dimensione della serie segata dalle C^3 diminuisce regolarmente di due unità; ma per altri 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 punti doppi allineati con i primi diviene $\rho_{12} = 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18$.

d) Oltre il 27° p. d. la curva C^{18} non ha più C^3 agg.; funzionano come curve aggiunte minime le C^4 agg. di cui $\rho_{11} \leq 22$.

Se vi sono 5 punti doppi per diritto la C^4 si spezza in retta e C^3,
6, 7, 8, 9 » » » » fanno $\rho_{11} = 1, 2, 3, 4$.

Degli altri p. doppi
4 per diritto spezzano la C^3 in una retta e C^2,
5, 6, 7, 8, 9 » fanno divenire $\rho_{11} = 5, 6, 7, 8, 9$.

Degli altri p. doppi
3 per diritto spezzano la C^2 in due rette,
4, 5, 6, 7, 8 » fanno divenire $\rho_{11} = 10, 11, 12, 13, 14, 15$.

Degli altri p. doppi
2 fanno diminuire la dim. della serie segata,
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 allineati con essi fanno $\rho_{11} = 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22$.

e) Oltre il 36° p. doppio la curva C^{18} ha per curva agg. minima la C^5 di cui $\rho_{10} \leq 25$ e per ogni gruppo di 9 punti doppi la C^{18} perde una curva aggiunta; cioè:

Oltre il 45° p. doppio la curva agg. minima è C^6 con $\rho_9 \leq 27$
» » 54° » » » » » » » C^7 » $\rho_8 \leq 28$
» » 63° » » » » » » » C^8 » $\rho_7 \leq 28$
» » 72° » » » » » » » C^9 » $\rho_6 \leq 27$
» » 81° » » » » » » » C^{10} » $\rho_5 \leq 25$
» » 90° » » » » » » » C^{11} » $\rho_4 \leq 22$
» » 99° » » » » » » » C^{12} » $\rho_3 \leq 18$
» » 108° » » » » » » » C^{13} » $\rho_2 \leq 13$
» » 117° » » » » » » » C^{14} » $\rho_1 \leq 7$
Oltre il 126° p. doppio » » » » » C^{15} » $\rho_0 = 0$

e si ricade nelle *curve iperellittiche* fino al 135° p. doppio.

8. Da questo esempio si può rilevare che, per quanto si elevi l'ordine della curva, questi fenomeni si ripeteranno allo stesso modo. Così anche per la C^{100} di ordine 100, che può avere 4881 punti doppi, a partire da quella senza punti doppi, per ogni gruppo di 50 punti doppi che la curva acquista, perde una curva aggiunta, a cominciare dalla *retta* aggiunta che può contenere 50 punti doppi della curva C^{100}.

È ovvio che non riteniamo che con quello che qui si è detto sia esaurito l'argomento delle variazioni simultanee dei ρ_α.

§ 5. Relazione fra le dimensioni di tre o più sistemi di curve tutte aggiunte o non.

1. Nella Nota 1.ª [1]) (n. 3 del § 8) abbiamo dimostrato che:

Teor. 1.° *Allorquando fra i sistemi di curve aggiunte (di ordine $< m$) ad una curva C_p^m (regolare nel suo ordine) si considerano i sistemi di ordini $\beta, \gamma, \beta+\gamma$, se le dimensioni delle serie complete segate da queste sono q, r, s* e *d è il numero dei punti doppi della C_p^m, si ha:*

$$s-(q+r)=\beta\gamma+d.$$

Teor. 2.° *Per il caso in cui uno dei sintomi β o γ sia di curve non aggiunte e pel caso in cui le serie segate dalle C^β, C^γ, siano residue rispetto alla serie segata dalle $C^{\beta+\gamma}$, senza che nessuna delle curve C^β, C^γ siano curve generiche del piano, si ha invece: $s-(q+r)=\beta\gamma$.*

Vediamo ora che cosa diventano queste relazioni per curve singolari in base alle formole (1) e (2).

2. Nel caso in cui i tre sistemi di curve aggiunte siano formati di due sistemi *complementari* rispetto al terzo, se indichiamo, per semplicità di notazione, con ρ', ρ'', ρ''' le *dipendenze* dei d punti doppi per rispetto a ciascuno di questi sistemi, si ha

$$q=\frac{\beta(\beta+3)}{2}-(d-\rho')$$

$$r=\frac{\gamma(\gamma+3)}{2}-(d-\rho'')$$

$$s=\frac{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+3)}{2}-(d-\rho''')$$

e quindi la formola del 1° teor. del n. precedente diventa

$$s-(q+r)=\beta\gamma+d+\rho'''-(\rho'+\rho'') \tag{12}$$

---

[1]) *Nuovo metodo ecc.* Vedi prefazione.

Qualora il terzo sistema sia di curve C^{m-3} agg. deve essere $\rho'' = 0$ e la relazione diviene

$$(13) \qquad s-(q+r)=\beta\gamma+d-(\rho'+\rho'') \, .$$

3. Nel caso che i sistemi delle C^β, C^γ non siano complementari, ma *residui* l'uno dell'altro rispetto al sistema delle $C^{\beta+\gamma}$ aggiunte, due casi possono avverarsi:

1.° Che le C^β siano curve aggiunte, e le C^γ siano curve generiche del piano;

2.° Che le C^β e C^γ siano parti delle curve agg. $C^{\beta+\gamma}$ (spezzate in due) in modo che, mentre le C^β passino per una parte dei punti doppi della C^m_p, le C^γ passino per i rimanenti.

Nel 1° caso avviene che le C^β appartengono al sistema delle curve aggiunte di ordine β, e le C^γ appartengono al sistema delle curve generiche del piano di grado γ, e quindi $r=\frac{\gamma(\gamma+3)}{2}$ ed allora si ha:

$$(14) \qquad s=(q+r)=\beta\gamma+\rho'''-\rho'$$

e nel caso che sia $\beta+\gamma=m-3$

$$(15) \qquad s-(q+r)=\beta\gamma-\rho'$$

Nel 2° caso, se le curve C^β passano per $d-h$ punti doppi della C^m_p e le curve C^γ passino per i rimanenti h punti doppi, supposto che ρ' rappresenti la *dipendenza* dei $d-h$ punti doppi e ρ'' quella dei rimanenti h p. doppii le dimensioni dei tre sistemi sono date da:

$$q=\frac{\beta(\beta+3)}{2}-(d-h-\rho')$$

$$r=\frac{\gamma(\gamma+3)}{2}-(h-\rho'')$$

$$s=\frac{(\beta+\gamma)(\beta+\gamma+3)}{2}-(d-\rho''')$$

e quindi

$$(16) \qquad s-(q+r)=\beta\gamma+\rho'''-(\rho'+\rho'')$$

Soltando quando $\rho'+\rho''=\rho'''$ (il che non avviene sempre) si ricade nella formola.

$$(17) \qquad s-(q+r)=\beta\gamma$$

già citata nel 2° teor. del n. 1.

La formola (12) e le altre seguenti valgono a trovare sotto forma intera uno dei numeri $q, r, s, \rho', \rho'', \rho'''$ quando si conoscono gli altri.

4. *Esempii.* 1.° Consideriamo la curva C^{10}_{27} con 9 p. doppi appartenenti ad una conica agg. e le curve C^2 C^3 C^5 tutte aggiunte. Poiché i 9 p. doppi stanno su una conica, $\rho' = \rho_5 = 4$ e la serie segata dalla C^2 agg. è una g^0_2; le C^3 agg. si spezzano nella conica ed in una retta, per cui il sistema di tutte le C^3 agg. è costituito dalla C^2 agg. fissa e da tutte le rette del piano e perciò sega una $g^2_{12} = g^2_{10} + g^0_2$ ed è $\rho'' = \rho_4 = 2$. Le C^5 agg. segano una g^{11}_{32} ed hanno $\rho''' = \rho_2 = 0$. Questi valori soddisfano la formola (12) e ciò conferma il ragionamento.

2.° Consideriamo la C^{18}_{82} con 54 p. doppi, e su di essa le curve aggiunte

giunte	C^7	C^8	C^{15}
che segano le serie	g^0_{18}	g^0_{36}	g^{81}_{162}
ed hanno	$\rho' = 19$	$\rho'' = 10$	$\rho''' = 0$

Applicando la formula (13) essa è identicamente soddisfatta,

$$81 - (0 + 0) = 56 + 54 - (19 + 10)$$
$$81 = 110 - 29 = 81 .$$

3.° Consideriamo la stessa C^{18}_{82} con 54 p. doppi e su di essa le curve

agg.	C^6	C^7	C^{13}
che segano	g^0_0	g^0_{18}	g^{50}_{126}
e per le quali	$\rho' = 27$	$\rho'' = x$	$\rho''' = 0$

Applicando la formola (12) si ha che $\rho'' = 19$, che si poteva trovare pure direttamente.

4.° Consideriamo rispetto alla C^{10}_{31} con 5 p. doppi per diritto le curve

agg.	C^1	C^2	C^3
che segano le serie	g^0_0	g^2_{10}	g^5_{20}
e per le quali	$\rho' = 3$	$\rho'' = 2$	$\rho''' = x$

Applicando la formola (12) si trova che $\rho''' = 1$, come si poteva ottenere direttamente.

5. La relazione (12) si può estendere a 4 sistemi di curve aggiunte. Siano i sistemi di curve agg. di ordine $\beta, \gamma, \delta, \beta + \gamma + \delta$ e siano q, r, t, s le dimensioni delle rispettive serie complete da essi segate. Indicando con $\rho', \rho'', \rho''', \rho^{IV}$ i rispettivi numeri di dipendenza, si avrà:

$$q = \frac{\beta(\beta+3)}{2} - (d - \rho')$$

$$r = \frac{\gamma(\gamma+3)}{2} - (d - \rho'')$$

$$t = \frac{\delta(\delta+3)}{2} - (d - \rho''')$$

$$s = \frac{(\beta+\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta+3)}{2} - (d - \rho^{IV})$$

e quindi [1])

$$(18) \qquad s-(q+r+t) = \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + 2d + \rho^{IV} - (\rho' + \rho'' + \rho''').$$

Se uno dei sistemi non è aggiunto, p. es. il terzo, la formola diviene

$$(19) \qquad s-(q+r+t) = \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\beta + d + \rho^{IV} - (\rho' + \rho'')$$

Se due dei sistemi non sono aggiunti, p. es. il secondo e terzo,

$$(20) \qquad s-(q+r+t) = \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta + \rho^{IV} - \rho'.$$

§ 6. Teoremi diversi sulle serie specializzate.

1. Le relazioni (12), (13)...(17) del § precedente fanno ritornare la mente al famoso e fondamentale teorema di Riemann-Roch, che lega le dimensioni di due serie complete *residue* l' una dell' altra rispetto alla *1ª serie canonica*, quella segata dalle C^{m-3} agg.

Abbiamo già osservato nella Nota 1.ª (n. 4 § 8) che la relazione

$$s-(q+r) = \beta\gamma$$

comprende, per le curve C_p^m regolari del loro ordine, come caso particolare il teorema di Riemann-Roch, poichè essa vale per tutte le serie canoniche, mentre il teor. di R.-R. vale soltanto per la 1ª serie canonica.

Ma siccome il teorema di R.-R. ha in sè qualchecosa che non è nelle relazioni precedenti, occorre che ci fermiamo un poco su di esso e, innanzi tutto, che ricordiamo la interessante storia di questo teorema culminante per la teoria delle serie lineari.

2. In base alla conoscenza degli integrali abeliani, Riemann (1826-1866) nei §§ 5 e 20 della Memoria [2]) pubblicata nel 1857, partendo dalla formola

$$s = \beta_1 t_1 + \beta_2 t_2 + \dots \beta_n t_n + \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots \alpha_p w_p + \text{cost.},$$

---

[1]) Cfr. § 9 n. 1 della Nota 1ª (*Nuovo metodo*, ecc.).

[2]) Riemann, *Theorie der Abelschen Functionen*.

ove le w_i sono gli integrali abeliani indipendenti di 1ª specie, e t_i gli integrali abeliani di 2ª specie con l'infinito nel punto i, la quale formula contiene $m+p+1$ costanti, osservò che, pel caso di $m>p$ e che le $2p$ equazioni lineari omogenee costituite dai moduli di periodicità siano tutte indipendenti, la funzione s contiene $m-p+1$ costanti arbitrarie, e negli altri casi ne contiene un numero maggiore non bene determinato.

Alcuni anni dopo Roch (1839; 1866), suo alunno, ebbe il merito grandissimo, con la memoria [1]) pubblicata nel 1864, di avere precisato che:

Se una funzione s diventa infinitesima di 1º ordine in m punti, ed in questi possono annullarsi r funzioni razionali $\dfrac{\Phi(s,z)}{\dfrac{\partial F}{\partial s}}$ *linearmente indipendenti, allora la funzione s contiene* $m-p+1+r$ *costanti arbitrarie.*

3. A questo teorema Brill e Nöther nel 1874 dettero la seguente forma:

Sulla curva C^m *siano segati i gruppi di una serie lineare speciale* g_n^r *e sia* $n-r=p-1-r'$ $(r'<p-1)$; *una curva agg.* C^{m-3} *delle* C_p^m *condotta a passare per un gruppo della* g_n^r *segherà la* C_p^m *in altri* $2(p-1)-n=n'$ *punti che appartengono ad un'altra serie* $g_{n'}^{r'}$; *quindi*

$$(21) \qquad r'=(p-1)-(n-r)\ ^{2)} \quad , \quad r=(n+r')-(p-1).$$

Da queste relazioni lo stesso Nöther deduceva che fra gli elementi n, r, n', r', delle due serie g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ l'una *residua* dell'altra si avverano le relazioni

$$(22) \qquad \begin{cases} n+n'=2(p-1) \\ n-n'=2(r-r') \end{cases}$$

le quali costituiscono il *teorema di reciprocità* di Nöther.

4. Per giungere a dimostrare il teorema di Riemann-Roch senza far uso degli integrali abeliani, Nöther con molta *genialità* premise un teorema che è stato chiamato *teorema di riduzione* (Reductionsatz) di Nöther, al cui perfezionamento collaborò epistolarmente Bertini per ridurlo alla forma esposta da lui negli Annali di Matem., v. 22 del 1894, p. 16:

---

[1]) Roch, *Ueber die Anzahl der willkürlichen Constanten in algebraischen Functionen* (Crelle's Journ., v. 64, p. 372-376).

[2]) La formola (21) $r'=(p-1)-(n-r)$ dice pure che i gruppi della serie speciale completa g_n^r impongono ai gruppi della serie canonica g_{2p-2}^{p-1}, che debbono contenerli, giusto $n-r$ condizioni.

Se g_n^r è una serie speciale completa di C_p^m e P è un punto fisso di C_p^m (generico) che non si trovi su tutte le C^{m-3} agg. passanti per un suo gruppo G, la serie g_{n+1}^r ottenuta aggiungendo P a g_n^r è completa.

Riportiamo qui integralmente la dimostrazione.

« Infatti conducendo per P una retta arbitraria a e per G una C^{m-3} agg. non passante per P, la retta a e C^{m-3} formano una C^{m-2} agg. che passa per un gruppo di g_{n+1}^r, che dà un resto R di questa serie costituito dai rimanenti $m-1$ punti d'intersezione della a con C_p^m e da un resto di g_n^r. Tutte le C^{m-2} per R segnano una serie completa; ma evidentemente si spezzano nella a e nella C^{m-3} per il detto resto di g_n^r; dunque segnano precisamente la serie formata dall'aggiungere P a ciascun gruppo di g_n^r. »

Ed aggiunge:

« Quando la C^{m-3} per G passi anche per P, questo punto fa parte di R, anzi del resto di g_n^r e, siccome P esiste su a le C^{m-3} (che insieme ad a compongono le C^{m-2} per R) non sono obbligate a passare per esso. Tutte non vi passano difatti, cioè la g_{n+1}^2 non è completa, quando ogni C^{m-3} per G passa per P. »

Da siffatto teorema Nöther ricavava la dimostrazione del teor. di R.-R. semplificata nel modo seguente (id. v. 22, p. 18-19):

« Se le C^{m-3} agg. che passano per un gruppo G di g_n^r sono $\infty^{r'}$, per G e per r' (e non per $r'+1$) punti generici di C_p^m passa una C^{m-3}. Per trovare il valore di r' si applichi successivamente il teor. di rid., per il quale, aggiungendo a g_n^r un punto fisso generico P_1 si ha una g_{n+1}^r completa ed inoltre, per ipotesi, speciale. Analogamente, aggiungendo a g_{n+1}^r un altro punto generico P_2 si ha una g_{n+2}^r completa speciale e così fino a $g_{n+r'+1}^r$, che sarà completa, ma non speciale, perchè G e gli $r'+1$ punti generici $P_1, P_2 \ldots P_{r'+1}$ non sono sopra una C^{m-3}. Adunque $n+r'+1-r=p$, donde

$$r' = (p-1)-(n-r)$$

Splendido risultato raggiunto da Nöther, che evitava in modo semplicissimo la necessità degli integrali abeliani.

5. Questa dimostrazione era esposta anche da Segre nelle sue lezioni del 1890-91 alla Università di Torino, a cui io ebbi l'opportunità di assistere. Essendo io persuaso fin d'allora della convenienza di studiare le curve aggiunte $C^{m-3-\alpha}$, mi apparve subito chiaro che qualora si fossero introdotte le curve aggiunte $C^{m-3-\alpha}$ queste stesse dimostrazioni, senza alcuna modifi-

cazione, potevan valere a dimostrare il teorema di riduzione ed il teor. di R.-R. generalizzati entrambi per qualunque serie canonica segata da curve agg. $C^{m-3-\alpha}$ (α positivo) e li formulai così:

a) Se G è un gruppo di una serie lineare completa g_n^r segata da curve agg. $C^{m-3-\alpha}$ e P è un punto fisso (generico) della curva C_p^m che non si trovi su tutte le $C^{m-3-\alpha}$ che passano per G allora la serie g_{n+1}^r ottenuta aggiungendo il punto P ad ogni gruppo della g_n^r è pure completa.

b) Se g_n^r è una serie completa segata sulla C_p^m da curve $C^{m-3-\alpha}$ agg., per ogni suo gruppo passeranno al più $\infty^{r'}$ curve agg. $C^{m-3-\alpha}$, dove

$$(23) \qquad r' \leq (p-1)-(n-r)-\left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho_\alpha\right)$$

oppure

$$(23') \qquad r \geq (n+r')-(p-1)+\left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho_\alpha\right)$$

Questi teoremi furono presentati per me dal CREMONA nel 1893 alla R. Acc. dei Lincei colle Memorie 4 e 5 che furono pubblicate nel v. 2 dei Rend. del 1893, 21/5 p. 460-467 e 3/6 p. 528-532. [1])

Ed aggiungevo dippiù che si poteva anche indagare quando nella formola (23) o (23') potesse aver luogo il segno $=$; poichè considerando che le due serie g_n^r, $g_{n'}^{r'}$ sono una *residua* dell' altra rispetto alla $g_{N_\alpha}^{R_\alpha}$ segata dalle curve agg. $C^{m-3-\alpha}$, si ha contemporaneamente

$$r' \leq (p-1)-(n-r)-\left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho_\alpha\right)$$

$$r \leq (p-1)-(n'-r')-\left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho_\alpha\right)$$

e sommando e ricordando che $n+n'=N_\alpha=2\,(p-1)-m\alpha$ si ha

$$\rho_\alpha \leq \delta\alpha\,.$$

Per aver luogo il segno $=$ in questa ultima relazione deve aver luogo il segno $=$ in entrambe le formole precedenti; dunque la formola (23) muta il segno $\leq$ nel segno $=$ quando ρ_α raggiunge il valore massimo δ_α, e questa condizione racchiude il caso di $\alpha=0$. Per $\alpha \neq 0$ la $C^{m-3-\alpha}$ è unica e la $g_{N_\alpha}^{R_\alpha}$ è di dimensione 0.

---

[1]) Cfr. AMODEO, Mem. 4. *Curve agg. minime* e Mem. 5 *Serie residue nella serie canonica delle $C^{m-3-\alpha}$ agg.*

6. Mostrai che anche il teorema di reciprocità si può generalizzare a tutte le serie canoniche [1]).

Qui lo possiamo confermare in poche parole. Per le formole (9) e (10) la formola (23) si può scrivere

$$r' \leq \frac{N_\alpha}{2} + (\delta_\alpha - \rho_\alpha) - (n - r)$$

e quindi
$$2(r - r') + 2(\delta_\alpha - \rho_\alpha) \geq 2n - N_\alpha$$
$$\geq n - n'$$

dalla quale

$$(24) \qquad (n - n') - 2(r - r') \leq 2(\delta_\alpha - \rho_\alpha)$$

Questa formola dice che il segno eguale ha luogo soltanto per $\alpha = 0$ poichè per $\delta_\alpha = \rho_\alpha$, essa diventa illusoria.

Così restano confermate, chiarite e, se si vuole, precisate le proposizioni dei §§ 3. 4. della Mem. 6 e quelle dei §§ 10 e 13 della Mem. 9.

7. Le Memorie 4 e 5 furono pubblicate, come abbiamo detto, nel 1893. Un anno dopo, 1894, negli Annali di Matematica (v. 22, p. 41-142) SEGRE, a p. 122-124 servendosi della rappresentazione della curva C_p^m nello spazio S_{p-1}, dimostrava il teor. di R.-R. diversamente da come aveva usato nelle sue lezioni del 1891, preferiva invece il metodo da me usato per la generalizzazione della formola (21). Egli cioè, nel n. 81 p. 123-124, servendosi della proprietà dei gruppi delle g_n^r sopra la curva canonica di stare in ispazii di dimensione $\leq n - r - 1$, trova la formola (21) sotto la forma di diseguaglianza e sommandola con la sua reciproca conchiude che per essere $N = n + n'$, deve aver luogo il segno $=$ e conchiude che $r' = (p - 1) - (n - r)$.

Nello stesso volume, BERTINI nella nota (**) a p. 19-20 della Mem. citata nel n. 4, osserva che la formula

$$r' \leq (p - 1) - (n - r) - \left(\frac{\alpha(\alpha + 3)}{2} + \rho_\alpha\right)$$

da me presentata si poteva ricavare pure dalla formula

$$r' = (p - 1) - (n - r).$$

Queste due affermazioni si citano, non per altro, che per far notare

[1]) Cfr. AMODEO. Mem. 6, § 4 e Mem. 9 (*Curve aggiunte e serie specializzate.* Rend. R. Acc Napoli, 1896, n. 13).

che SEGRE e BERTINI implicitamente confermavano fin da quel tempo la bontà delle formule (23) e (23') valevoli per tutte le serie specializzate, che prima nessuno aveva enunciate.

8. Mi preme però di confermare quì un'altra considerazione che già feci nella Mem. 9, nel n. 6 p 10 sulle formole (23) e (23'). [1])

Da esse ricavai

$$(25) \quad n'+r-(p-1)+\left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho_\alpha\right)\leq r'\leq(p-1)-(n-r)-\left(\frac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho_\alpha\right)$$

e ricordando la formola (10), dedussi da essa,

$$n'+r-(N_\alpha-R_\alpha)\leq r'\leq(N_\alpha-R_\alpha)-(n-r)$$

e poi, tenendo presente che $N_\alpha=n+n'$ ottenni

$$(26) \qquad R_\alpha-(n-r)\leq r'\leq n'-(R_\alpha-r),$$

che ha la sua importanza, perchè in essa non apparisce esplicitamente il genere della curva; e dippiù, per il teor. del n. 5 del § 2, il suo primo membro è positivo o nullo.

9. Il prof. SEVERI, che nel suo *Trattato di Geometria algebrica* (1908-1921-1926) ha arrecati tanti perfezionamenti agli studii fatti su queste curve, non si è allontanato molto dalle dimostrazioni di NÖTHER-BERTINI di questo teorema di R.-R. (cfr. p. 153-154). Egli ha dato un nome al numero $r'+1$ della dimensione del sistema di curve C^{m-3} che sega la $g_{n'}^{r'}$, residua di g_n^r rispetto alla 1ª serie canonica: lo ha detto *indice di specialità* delle g_n^r.

Questo indice di specialità che egli indica con i non è da canfondere col numero d'ordine di serie specializzate, 1ª, 2ª, 3ª, da me usato per le serie lineari complete segate dalle curve C^{m-4}, C^{m-5}, C^{m-6} agg.

§ 7. Confronto fra le formole (15) e (21).

1. Applicando il teorema di R.-R. a trovare la dimensione r della serie residua della $(\alpha+1)$esima serie canonica $g_{\alpha}^{R_\alpha}$ rispetto alla 1ª serie canonica $g_{N_0}^{R_0}$ delle C^{m-3} agg. si ha, per la formola (21),

$$r=(p-1)-(N_\alpha-R_\alpha)$$

e per la formola (7) $\qquad r=\dfrac{\alpha(\alpha+3)}{2}+\rho_\alpha$

[1]) In questa Mem. 9 consideriamo soppresso il n. 20 (p. 19 e 20 dell'estratto) che qui è sostituito da tutto il § 5.

Invece, applicando la formola (15), si ha

$$r = s - \beta\gamma - q + \rho_\alpha = R_0 - \alpha(m - 3 - \alpha) - R_\alpha + \rho_\alpha$$

e quindi per la formola (1) $$r = \frac{\alpha(\alpha + 3)}{2},$$

come doveva accadere, perchè la formola (15) riguarda la relazione fra le effettive dimensioni R_α, r, R_0.

Occorre perciò indagare la ragione di questa diversità fra i risultati delle due formole (15) e (21); e ciò faremo per chiarezza sopra degli esempi.

2. *Esempio 1°*. Consideriamo la curva C^{10}_{19} con 17 punti doppi situati su una quartica; essa avrà per curva aggiunta minima la C^4, che sega una g^0_6 ed ha $\rho_3 = 3$.

La dimensione della serie residua della g^0_6 rispetto alla 1ª serie canonica segata dalle C^7 agg. è, per la formola (21),

$$r = 18 - (N_3 - R_3) = 18 - 6 = 12,$$

mentre per la formola (15) è $r = 9$,
perchè le C^3 del piano segano sulla C^{10}_{19} una g^9_{30}.

Dunque il teor. di R.-R. dice per le curve singolari qualche cosa dippiù del teorema della formola (15): dice che la serie g^9_{30} segata dalle C^3 del piano sulla curva, i cui punti doppi non sono indipendenti *non è completa*, vale a dire che deve esistere sulla curva C^{10}_{19} una serie dello stesso ordine 30, di dimensione maggiore di 9, che in questo caso deve essere una g^{12}_{30}. Ora nella C^{10}_{19} una serie di ordine 30 non può essere segata da curve aggiunte di ordine minore di 7 (poichè le C^6 e le C^5 agg. segano rispettivamente una g^{10}_{26} e g^3_{16}) dunque deve essere segata dalle C^7 agg. Ed infatti la 1ª serie canonica è una g^{18}_{36} e se le C^7 si fanno passare per 6 punti fissi generici della C^{10}_{19}, esse segheranno pure una serie completa che è appunto la g^{12}_{30} che ha per serie parziale la g^9_{30} segata dalle cubiche del piano. Le g^{12}_{30} sono ∞^6.

3. *Esempio 2°*. Consideriamo la C^{10}_{14} con 22 punti doppi situati sopra una curva C^5. La C^5 sarà l'unica curva aggiunta minima della C^{10}_{14} e sega una g^0_6 con $\rho_2 = 2$.

Per la formola (21) $r = 13 - 6 = 7$,
per la formola (15) $r = 5$,
perchè le curve C^2 del piano segano una g^5_{20}.

Sulla C_{14}^{10} la 1ª serie canonica è una g_{26}^{13} e delle C^7 agg. di essa, quelle che passano per 6 punti generici della C_{14}^{10} segano una g_{20}^{7} lineare completa, che è quella cercata. Le g_{20}^{7} sono in numero ∞^6.

4. *Esempio 3°*. Consideriamo la C_{106}^{18} con 30 punti doppi situati su una C^6. La C^6 agg., unica, sega una g_{48}^{0} con $\rho_9 = 3$.

La residua di questa con la formola (15) è una g_{162}^{54} segata dalle C^9 del piano, mentre per la formola (21) deve essere di dimensione

$$r = 105 - 48 = 57\ ;$$

quindi la g_{162}^{54} deve essere contenuta in una serie completa g_{162}^{57}. La 1ª serie canonica è una g_{210}^{105} e se le C^{15} agg. si fanno passare per 48 punti generici della curva si hanno appunto le curve C^{15} che segano la g_{162}^{57} completa che la contiene. Vi sono ∞^{48} sèrie g_{172}^{57}.

5. *Esempio 4°*. Nella C_8^6 con 2 soli punti doppi, se consideriamo la serie residua della serie segata dalle C^2 agg. (la g_8^3 con $\rho_1 = 0$) rispetto alla g_{14}^{7} segata dalle C^3 agg. troviamo che la formola (21) e la formola (15) danno entrambe $r = 2$, perchè $\rho_1 = 0$.

Invece se consideriamo la residua della serie g_2^0 segata dalla C^1 agg. che passa per i 2 punti doppi rispetto alla g_{14}^{7} segata dalle C^3 agg troviamo che entrambe le formole danno

$$r = 5\,,$$

cioè la serie segata dalle coniche del piano g_{12}^{5} è completa e ciò perchè $\rho_2 = 0$. La importanza dei numeri ρ_α è quindi molto più grande di quello che si potesse ritenere, riflettendosi sopra la dimensione di una serie completa che è carattere invariantivo.

Napoli, maggio 1939, a. XVII.

STUDIO DELLE VITI DEL MICROMETRO REPSOLD DEL CERCHIO MERIDIANO DI CAPODIMONTE

Nota di **E. Guerrieri** *e* **T. Nicolini** *presentata dal socio* **L. Carnera**

(Adunanza del dì 13 gennaio 1940 - XVIII)

Sunto. — Si espone la ricerca degli errori progressivi e periodici per le due viti del micrometro impersonale REPSOLD applicato al cerchio meridiano dell'Osservatorio di Capodimonte; detti errori risultano trascurabili.

L'esame delle due viti, di ascensione retta e di declinazione, del micrometro impersonale del cerchio meridiano REPSOLD appartenente allo Osservatorio di Capodimonte, allo scopo di dedurre gli errori progressivi e periodici, è stato effettuato seguendo il metodo indicato dal Direttore prof. L. CARNERA, metodo di cui una accurata applicazione fu fatta dalla Dott. M. CAMPA all'Osservatorio di Trieste [1]).

Il metodo consiste nel misurare col micrometro da studiare e con le varie parti delle viti relative, intervalli fissi di un *comparatore*.

A tale scopo sono stati scelti quattro intervalli costanti, uno quasi perfettamente uguale, e gli altri di poco superiori, ad una rotazione intera delle viti; si sono misurati tali intervalli, procedendo di 0.2 in 0.2 rotazioni, ed affinché fosse eliminato un eventuale effetto degli errori periodici nella determinazione dei progressivi, è stata presa quale valore dell'intervallo tra due rotazioni intere, la media di cinque valori equidistanti. Così p. es. il valore dell'intervallo misurato in corrispondenza approssimativa delle rotazioni 4.0 e 5.0 risulterà dalla media dei 5 valori tra

3.6 — 4.6   3.8 — 4.8   4.0 — 5.0   4.2 — 5.2   4.4 — 5.4

restando in tal modo eliminati gli errori periodici.

Per la vite di ascensione retta sono state eseguite quattro serie di misure per ciascuno intervallo; due col tamburo della vite a destra, nel senso diretto e nel senso inverso, e due in entrambi i sensi col tamburo della vite a sinistra, dopo eseguita la rotazione del micrometro di 180°. Per la vite di declinazione, non potendo eseguire le letture con la vite in alto, si sono tuttavia egualmente realizzate quattro serie di misure per ciascun intervallo, metà nel senso diretto e metà nel senso inverso.

---

[1]) *Studio delle viti di un micrometro* TROUGHTON e SIMMS. M. S. A. I. vol. VII, n. 1

I vecchi valori del passo medio delle due viti, ricavati dalle osservazioni meridiane precedenti, sono [1]:

$1^r = 4^s.5455 = 68''.182$ (vite di A. R.)
$1^r = 33''.00$ (« » D.)

Ma dopo la revisione dell'obiettivo eseguita dalla Zeiss tre anni or sono, divengono necessarie nuove determinazioni.

Errori progressivi. — In testa alle seguenti due tabelle I e II, nelle quali sono riuniti i risultati per la ricerca degli errori progressivi delle due viti, sono registrati i valori medi degli adottati intervalli, misurati sino alla 4.ª decimale di rotazione, rispettivamente nel senso indicato. I numeri registrati in entrambe le tabelle sono gli scostamenti $d - d_i$ tra il valor medio di ciascun intervallo ed il valore singolo relativo ad ogni rotazione, il quale ultimo poi risulta, in conformità di quanto detto, dalla media dei 5 valori ottenuti percorrendo la vite di 0.2 in 0.2 rivoluzioni; tali scostamenti sono presi nel senso medio meno singolo. Così indicando gli scostamenti singoli (dagli intervalli medî) per una generica rotazione, con

$$s_{i6} \qquad s_{i8} \qquad s_{i0} \qquad s_{i2} \qquad s_{i4}$$

la loro media sarà un certo valore s_i, e le tabelle I e II fino alla 17ª colonna riportano appunto queste medie $s_i = d - d_i$ corrispondenti alle varie serie di misure indicate dalle tabelle stesse.

Nelle colonne *Mg* delle due tabelle sono riportate le medie generali per righe dei valori predetti, effettuate però con l'accorgimento e col significato seguente: siccome queste *Mg* vogliono indicare l'eccesso (media meno singolo) riferito alla rotazione media esatta, così per ricavarle si sono divisi i valori s_i rispettivamente per 1.0, 1.1, 1.3, 1.4 secondochè corrispondevano al 1°, 2°, 3° o 4° intervallo prescelti, ed i risultati sono dati approssimati fino ai decimi della 4ª decimale di rotazione. La colonna seguente, ottenuta per addizioni successive dei numeri dell'ultima, dà gli errori progressivi, correzioni da aggiungere algebricamente alle letture micrometriche. Nelle due colonne seguenti queste correzioni sono state ridotte alle letture di rivoluzioni intere (anzichè agli intervalli tra le rotazioni) e perequate al modo indicato dal grafico annesso. Anche questi errori progressivi sono approssimati semplicemente alla 4ª decimale.

La tav. I mostra nelle misure un certo effetto sistematico nei segni, diverso nelle due posizioni tamburo a destra e rispettivamente a sinistra;

---

[1]) E. Guerrieri. *Catalogo di 166 stelle a forte moto proprio,* ecc. R. Osservatorio di Capodimonte, Memorie Astronomiche, n. 10.

TAV. I. — *Errore Progressivo della Vite di Ascensione Retta*

Scostamenti in unità 0.ʳ0001

Rotz.	Tamburo a destra – Diretta 1.ʳ0030	1.ʳ1083	1.ʳ2586	1.ʳ3696	Inversa 1.ʳ0027	1.ʳ1080	1.ʳ2580	1.ʳ3692	Tamburo a sinistra – Diretta 1.ʳ0035	1.ʳ1369	1.ʳ2679	1.ʳ3903	Inversa 1.ʳ0031	1.ʳ1365	1.ʳ2682	1.ʳ3901	Mg	E. p.
0-1	+6	+4	+4	....	+9	+1	+2	....	−8	...	....	−5	−8	−4	+2	−5	−0.1	−0.1
1-2	+3	+2	+11	+11	+1	+4	+9	+8	+4	−6	+4	−10	−2	−4	+8	−5	+2.0	+1.9
2-3	+3	+4	+10	+8	+7	+2	+8	+3	−3	−2	+4	−7	−2	−4	+6	−8	+1.5	+3.4
3-4	+7	+7	+7	+6	+4	+6	+4	+7	+2	−2	+4	−9	0	−4	−5	−6	+1.5	+4.9
4-5	+3	+8	+9	−4	+3	+2	+2	+3	−3	−3	+11	−6	−2	−8	−2	5	+0.5	+5.4
5-6	+3	+8	+6	+4	+2	+4	+6	+6	−3	−5	−2	+12	0	0	−9	−3	+1.5	+6.9
6-7	+2	+3	+3	+7	−1	+4	+3	+4	−2	−6	+6	+4	−1	−3	−5	−3	+0.6	+7.5
7-8	+2	+2	−2	+3	0	+4	+3	−3	−2	+5	0	+12	+4	+6	+1	+10	+2.3	+9.8
8-9	+2	+2	+4	+4	+1	−1	+6	−1	0	−1	−8	+15	0	+2	−3	+1	+1.2	+11.0
9-10	+1	+1	0	−6	0	+2	0	0	0	+6	−1	+10	0	−1	−4	0	+0.5	+11.5
10-11	−2	−5	−3	−3	+1	+1	+2	−2	0	+1	−7	+2	+4	+4	−6	+1	−0.5	+11.0
11-12	+2	−1	−3	−6	0	+4	−6	+1	+5	+5	−16	+7	+1	−2	+3	−2	−0.2	+10.8
12-13	−3	−4	0	−4	−1	−2	−1	−6	+1	−1	−8	−3	+1	+3	−7	−1	1.8	+9.0
13-14	+1	+2	−1	−5	+1	−2	−2	−7	0	+1	−5	+1	−4	+3	+3	+5	−0.5	+8.5
14-15	−4	+2	−6	−3	−6	−1	−5	−2	−1	+1	−5	−1	−1	+4	+6	+11	−0.7	+7.8
15-16	−4	−1	−9	−2	−3	−8	−10	−3	+3	+3	+9	−6	−2	+5	+5	+10	−0.7	+7.1
16-17	−1	−8	−8	−2	−3	9	−3	−1	+3	+6	+4	−5	+2	+2	+3	+6	−0.7	+6.4
17-18	−8	−10	−12	−2	−5	−6	−8	+1	+1	+5	+8	−5	+2	−2	+7	−5	−2.1	+4.3
18-19	−8	−8	−9	−2	−7	−10	−14	−10	+3	−2	−6	−14	−1	+4	+3	−2	−4.0	+0.3
19-20	−7	....	....	....	−7	0	+6	....	+2	+3	....	....	+5	−4	...	....	−0.4	−0.1

Rivol.	E. p. perequati
0	0
1	+1
2	+2
3	+4
4	+5
5	+6
6	+7
7	+9
8	+10
9	+11
10	+11
11	+11
12	+10
13	+9
14	+8
15	+7
16	+7
17	+5
18	+2
19	+1
20	0

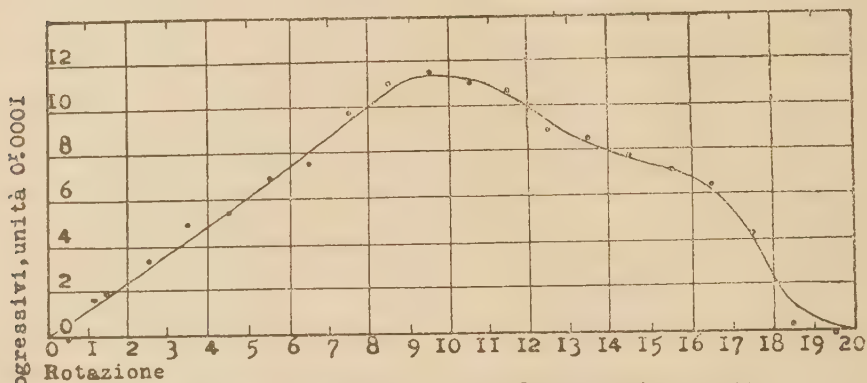
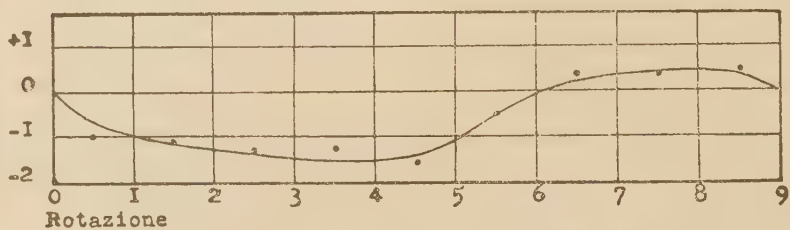
Tav. II. — *Errore Progressivo della Vite di Declinazione*

Scostamenti in unità $0^{r}0001$

Tamburo a destra

Rotaz.	Diretta $1^{r}.0377$	$1^{r}.1638$	$1^{r}.2853$	$1^{r}.3940$	Inversa $1^{r}.0376$	$1^{r}.1637$	$1^{r}.2850$	$1^{r}.3939$	Diretta $1^{r}.0105$	$1^{r}.1679$	$1^{r}.2867$	$1^{r}.3964$	Inversa $1^{r}.0103$	$1^{r}.1679$	$1^{r}.2864$	$1^{r}.3962$	Mg	E. p.
0-1	+ 1	0	— 3	— 2	— 4	— 2	— 7	+ 4	+ 2	0	— 7	— 3	— 2	+ 6	— 4	— 2	— 1.0	— 1.0
1-2	0	+ 3	0	0	— 1	+ 2	0	+ 2	— 2	— 1	— 5	— 1	— 2	+ 1	+ 3	+ 1	— 0 1	— 1.1
2-3	— 3	— 1	+ 2	0	+ 2	— 1	+ 2	+ 1	— 3	— 2	0	+ 1	0	— 1	+ 1	— 1	— 0.2	— 1.3
3-4	— 6	0	+ 1	+ 1	0	+ 1	+ 4	+ 1	— 1	0	— 1	+ 1	0	— 1	+ 2	— 1	0	— 1.3
4-5	— 2	0	— 1	+ 2	— 4	+ 2	0	+ 1	— 2	+ 3	1	+ 3	— 2	+ 1	— 2	0	— 0.3	— 1.6
5-6	+ 5	0	+ 2	+ 2	0	+ 1	+ 2	+ 4	+ 3	— 1	+ 1	+ 1	+ 2	— 1	— 1	0	+ 1.1	— 0.5
6-7	+ 5	+ 1	— 4	+ 2	+ 5	0	+ 1	— 2	+ 2	— 2	+ 3	+ 3	+ 1	0	0	+ 1	+ 0.9	+ 0.4
7-8	+ 1	+ 1	— 1	0	+ 3	— 3	— 2	— 8	+ 3	+ 2	+ 4	+ 1	— 1	0	— 1	— 1	+ 0.0	+ 0.4
8-9	— 4	— 6	+ 5	— 1	— 1	— 3	0	0	+ 1	— 1	+ 9	— 4	+ 3	— 2	+ 4	+ 1	+ 0 1	+ 0.5

Rivol.	E.p. perequati
0	0
1	— 1
2	— 1
3	— 1
4	— 2
5	— 1
6	0
7	0
8	0
9	0

ma è da notare che le cifre rappresentano decimillesimi di rotazione, ed i millesimi sono letti a stima. La sola diversa posizione del tamburo può dare letture stimate affette da piccoli errori sistematici personali; l'errore probabile relativo alle medie tabulate delle misure è circa 3 decimillesimi di rotazione. Il massimo effetto per l'errore progressivo in ascensione retta, dalle estremità della vite al centro, è $0^r.0011$ corrispondente a $0^s.005$. In complesso risulta trascurabile ogni effetto degli errori

Errore progressivo della vite di ascensione retta

Errore progressivo della vite di declinazione

progressivi sulle letture, sia per la vite di ascensione retta, sia (ancora maggiormente) per la vite di declinazione.

Gli errori probabili relativi ai valori *Mg* delle due viti sono dell'ordine di $\pm\ 0^r.0001$, e cioè dello stesso ordine di grandezza dei valori *Mg* stessi; e così la legittimità di trascurare gli errori progressivi è decisamente provata.

Errori periodici. — Per la ricerca degli errori periodici, si assume inalterato il decimo zero; ciò vale a considerarlo come origine fissa per le frazioni di rivoluzione, cioè ad assumere per origine una generatrice della vite. Anche qui, come bisognerà correggere le letture micrometriche

(in base ora alle semplici cifre dei decimi di rivoluzione) per avere intervalli corretti?

In corrispondenza, p. es., al decimo 6, calcolata la media $d_{(6)}$ delle misure dell'intervallo considerato d per tutte le rivoluzioni, si consideri lo scostamento $s_{(6)} = d - d_{(6)}$, tra il valore medio complessivo ed il valore medio corrispondente al solo decimo 6; ed analogamente si operi per gli altri decimi considerati. Si otterranno le quantità

$$s_{(6)} \qquad s_{(8)} \qquad s_{(0)} \qquad s_{(2)} \qquad s_{(4)}$$

riportate nella riga delle medie alle tavole III e IV.

Si noti che l'eccesso ad una rotazione per gli errori periodici, occorre abbastanza grande; prendendolo molto piccolo, le sue valutazioni dalle diverse parti del tamburo differiscono solo di quantità di ordine insensibile alle misure. Per questa ragione è stata esclusa nel caso attuale la considerazione degli intervalli 1.0 ed 1.1 rotazioni.

Si attribuisca alla lettera e il significato di eccesso ad una rotazione ($d = 1 + e$, $d_{(i)} = 1 + e_{(i)}$). Per correggere *piccoli* intervalli misurati occorre moltiplicarli per $\frac{e}{e_{(0)}}$ in prossimità del decimo zero, $\frac{e}{e_{(2)}}$ in prossimità del decimo 2, ecc. Siccome l'intervallo d è noto, e le $s_{(i)}$ sono dedotte dalla tabella III, per correggere piccoli intervalli, occorrerà moltiplicarli per

$$f_0 = \frac{d-1}{d - s_{(0)} - 1} \quad \text{in prossimità del decimo } 0$$

$$f_2 = \frac{d-1}{d - s_{(2)} - 1} \quad « \quad « \quad « \quad « \quad 2$$

e così di seguito, fattori tutti prossimi ad 1. Naturalmente è opportuna una perequazione, e si possono ricavare i fattori f_1, $f_3, \ldots$ per i decimi intermedi 1, 3, ...

Con approssimazione in pratica più che sufficiente, le letture potranno correggersi al seguente modo:

decimo letto	0	2	4	6	8
lettura corretta	0	$2f_1$	$2(f_1 + f_3)$	$2(f_1 + f_3 + f_5)$	$2(f_1 + f_3 + f_5 + f_7)$

Tuttavia nel caso attuale tutte queste considerazioni sono superflue; le $s_{(i)}$ date alla riga delle medie nelle tavole III e IV raggiungono appena il valore di una unità della 5ª cifra decimale, e così in pratica i fattori f_0, f_1, f_2, ecc. sono senz'altro da identificare con l'unità. Ossia gli errori periodici risultano praticamente nulli.

TAV. III. — *Errore Periodico della Vite di Ascensione Retta*
scostamenti in unità 0ʳ.0001

Rotz \ decimi	0ʳ.6		0ʳ.8		1ʳ.0		1ʳ.2		1ʳ.4		MEDIA				
	1.25	1.37	1.25	1.37	1.25	1.37	1.25	1.37	1.25	1.37	0ʳ.6	0ʳ.8	1ʳ.0	1ʳ.2	1ʳ.4
1ʳ	......	......	......	......	0	+11	+2	−4	+7	+3	......	......	+5	−1	+5
2	+8	+1	+4	−4	−3	+5	−5	0	+5	+5	+4	0	+1	−2	+5
3	+7	−4	−5	−4	+11	−4	−6	+3	−4	+6	+1	−4	+3	−1	+1
4	−8	−5	−6	+8	−4	−3	+2	+2	−1	−3	−6	+1	−3	+2	−2
5	−8	+7	+7	−1	−3	−9	+5	−1	−7	−10	0	+3	−6	+2	−8
6	−3	+5	+1	−3	+6	−2	+6	−5	−12	+7	+1	−1	+2	0	−2
7	−2	−5	+1	−9	+4	+8	+3	+4	+2	−2	−3	−4	+6	+3	0
8	−4	+1	+2	+7	0	−2	−5	−5	+9	+6	−1	+4	−1	+5	+7
9	+6	−6	−4	+4	+1	+6	−8	+7	+1	−5	0	0	+3	0	−2
10	+3	+5	+1	0	−13	−12	+4	−1	+1	−4	+4	0	−12	+1	−2
11	−4	−6	+7	−1	−2	−5	0	+12	−2	+7	−5	+3	−3	+6	+2
12	−5	+1	−7	−2	+4	+5	+4	−4	−6	−5	−2	−4	+4	0	−5
13	−3	−5	+3	−4	0	−4	−5	+2	+2	−1	−4	0	−2	−1	0
14	+5	+1	+4	+3	−2	+2	+2	0	+1	−3	+3	+3	0	+1	−1
15	+7	+7	−6	+5	−1	+1	−1	−8	+4	+4	+7	0	0	−4	+4
16	+1	+1	+4	+6	+5	+3	−1	+5	+2	−2	+1	+5	+4	+2	0
17	−1	+3	+3	0	+1	+9	0	+1	+4	+1	+1	+1	+5	0	+2
18	+6	−1	+1	−7	−2	−10	+3	−1	−3	+3	+2	−3	−6	+1	0
19	−7	−4	−9	0	−4	0	+2	−6	−4	−2	−5	−4	−2	−2	−3
20	+1	......	......	......	......	......	......	......	......	......	+1	......	......	......	
Medie											−0.1	0.0	0.0	+0.1	+0.1

TAV. IV. — *Errore Periodico della Vite di Declinazione*

scostamenti in unità 0".0001

Rotaz.	0.6		0.8		1.0		1.2		1.4		MEDIA				
	1".28	1".39	1".28	1".39	1".28	1".39	1".28	1".39	1".28	1".39	0".6	0".8	1".0	1".2	1".4
1	— 5	0	0	— 1	— 3	— 1	+ 2	— 2	— 4	— 1	— 2	0	— 2	0	— 2
2	+ 3	0	+ 2	0	— 2	+ 1	+ 3	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	0	+ 2	+ 1
3	+ 3	+ 2	— 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 2	— 2	— 1	0	+ 2	0	+ 1	0	0
4	— 1	+ 2	— 1	0	+ 1	— 2	+ 1	+ 1	+ 3	0	0	0	0	+ 1	+ 1
5	+ 3	+ 1	+ 1	+ 3	+ 1	+ 2	— 4	+ 1	— 2	+ 2	+ 2	+ 2	+ 1	— 1	0
6	— 1	0	+ 1	0	+ 1	0	0	+ 1	0	+ 1	0	0	0	0	0
7	— 2	— 2	— 1	— 5	0	0	— 1	+ 2	0	+ 1	— 2	— 3	0	0	0
8	+ 1	— 3	— 3	0	+ 1	0	0	— 2	+ 6	— 4	— 1	— 1	0	— 1	+ 1
Medie											0.0	— 0.1	0.0	+ 0.1	+ 0.1

Limitatamente ai due maggiori intervalli usati per gli errori periodici, si è rilevata la statistica di tutti gli scostamenti (media meno singolo) dai quali sono state dedotte le tav. III e IV; si tratta di 747 valori per la vite di ascensione retta e 319 valori per la vite di declinazione. Si è così avuta la tav. V, gli scostamenti essendo sempre dati in decimillesimi di rotazione.

Escluse le prevedibili irregolarità che si presentano di decimillesimo in decimillesimo, si osserva una notevole simiglianza ad una distribuzione di errori.

Per la compilazione della presente nota, le osservazioni e le deduzioni dei valori medi sono dovuti al prof. GUERRIERI, insieme al quale il dott. NICOLINI ha preso parte alla redazione del testo.

Scostamenti Tav. V

Vite di Ascensione Retta

Scost. ±	$(1^r.37)$ N°		$(1^r.25)$ N°.	
0	24		26	
1	36		47	
2	42	172	42	163
3	40		21	
4	30		27	
5	24		31	
6	34		29	
7	23	107	19	111
8	12		12	
9	14		20	
10	18		6	
11	14		14	
12	9	53	10	54
13	5		11	
14	7		13	
15	5		8	
16	5		3	
17	6	23	7	24
18	4		4	
19	3		2	
20	4		5	
21	3		3	
22	5	15	4	20
23	2		5	
24	1		3	
> 24	2	2	3	3
		372		375

Vite di declinazione

Scost. ±	$(1^r.39)$ N.°	$(1^r.28)$ N.°
0	11	16
1	40	20
2	31	39
3	27	30
4	18	24
Totale	127	129
%	80%	80%
5	14	9
6	5	9
7	10	5
> 7	4	7
Totale	33	30
%	20%	20%

SULL'INVERSIONE DELLA TRASFORMATA DI LAPLACE *)

Nota del dott. **Luigi Amerio,** *presentata dal socio ordinario* **M. Picone**

(Adunanza del dì 13 gennaio 1940 - XVIII)

Sunto. — Si dà una generalizzazione della formula di RIEMANN per l'inversione della trasformazione di LAPLACE, mediante la quale si può risalire dalla funzione trasformata $f(p)$ alla funzione trasformanda $F(t)$, facendo su quest'ultima le ipotesi più generali possibili.

Successivamente si indica una proprietà di tale formula generalizzata.

Sia $F(t)$ una funzione reale o complessa della variabile reale t, definita per $-\infty < t < \infty$ e integrabile secondo LEBESGUE in ogni intervallo finito, la quale ammette la trasformata di LAPLACE

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F(t)\, dt \tag{1}$$

nella striscia $\alpha < R(p) < \beta$ del piano della variabile complessa p.

È noto [1]) allora che se anche $|F(t)|$ è funzione trasformabile nella striscia $\alpha_1 < R(p) < \beta_1$ (e sarà necessariamente $\alpha \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \beta$), e se la serie di FOURIER relativa alla $F(t)$ considerata nell'intervallo $t-\pi |-| t+\pi$ è convergente nel punto t, vale la formula d'inversione di RIEMANN

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{pt} f(p)\, dp \tag{2}$$

nella quale è $\alpha_1 < k < \beta_1$, per cammino di integrazione può assumersi la retta $R(p) = k$ e, su questa, l'integrale va calcolato come

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p)\, dp.$$

---

*) Lavoro eseguito presso il R. Istituto Nazionale di Alta Matematica.

[1]) DOETSCH G., *Theorie und Anwendung der* LAPLACE — *Transformation*, Berlin, Springer, 1937, p. 104, Satz 1.

Come si vede, la possibilità di risalire, mediante la formula di RIEMANN, alla funzione $F(t)$ dalla trasformata $f(p)$, è limitata da particolari ipotesi sul comportamento della $F(t)$ in un intorno del valore t e all'infinito.

Scopo di questo lavoro è di provare come, con una semplice generalizzazione della formula di RIEMANN, si possa determinare, mediante la $f(p)$, la $F(t)$, facendo su quest'ultima le ipotesi più generali possibili.

Si dimostra infatti che, se $F(t)$ è integrabile secondo LEBESGUE in ogni intervallo finito e trasformabile nella striscia $\alpha < R(p) < \beta$, posto

$$G_{n,\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^n dp, \tag{3}$$

si ha

$$\lim_{\lambda \to \infty} G_{n,\lambda}(t) = F(t) \tag{4}$$

per quasi tutti i valori di t, qualunque sia k, con $\alpha < k < \beta$, e qualunque sia l'intero positivo n.

Inoltre se la $F(t)$ è continua in tutti i punti di un intervallo $a \,|\!-\!|\, b$, la convergenza è uniforme per $c \leq t \leq d$, con $a < c < d < b$; se nel punto t la $F(t)$ ha una discontinuità di prima specie, la $G_{n,\lambda}(t) \to \frac{1}{2}\big(F(t+) + F(t-)\big)$.

Successivamente si prova che se la funzione $F(t)$ è assolutamente continua in un intervallo $a \,|\!-\!|\, b$ e ammette in questo le derivate $F'(t)$, $F''(t), \ldots F^{(n-1)}(t)$ assolutamente continue, risulta

$$\begin{aligned} F^{(n)}(t) &= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp \\ &= \lim_{\lambda \to \infty} G^{(n)}_{n+1,\lambda}(t) \end{aligned} \tag{5}$$

quasi ovunque per $a \leq t \leq b$.

Anche per la (5) si dimostra poi che se la $F^{(n)}(t)$ è continua in tutti i punti di $a \,|\!-\!|\, b$, la convergenza è uniforme in ogni intervallo $c \,|\!-\!|\, d$, con $a < c < d < b$; se nel punto t, con $a < t < b$, le $F^{(n)}(t)$ ha una discontinuità di prima specie, la funzione $G^{(n)}_{n+1,\lambda}(t) \to \frac{1}{2}\big(F^{(n)}(t+) + F^{(n)}(t-)\big)$.

***

1. Cominciamo col premettere la dimostrazione di alcuni lemmi, dei quali faremo uso per generalizzare la formula d'inversione di RIEMANN.

LEMMA I. — *Se la funzione* $\varphi(v)$, *definita per* $-\infty < v < \infty$ *e integra-*

bile secondo LEBESGUE *in ogni intervallo finito, è tale che, per un valore intero positivo o nullo di* n, *risulti*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^n dv = A$$

finito, si ha anche

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dv = A.$$

DIMOSTRAZIONE. — Si ha

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dv =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{\lambda} \big(\varphi(v) + \varphi(-v)\big) (\lambda^2 - v^2)^{n+1} dv$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{\lambda} \big(\varphi(v) + \varphi(-v)\big) \left\{ \int_v^{\lambda} z (z^2 - v^2)^n dz \right\} dv$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{\lambda} z \left\{ \int_0^{z} \big(\varphi(v) + \varphi(-v)\big) (z^2 - v^2)^n dv \right\} dz$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{\lambda} z^{2n+1} \left\{ \int_{-z}^{z} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)^n dv \right\} dz.$$

Fissato $\varepsilon > 0$, si determini z_0 in modo che per $z \geq z_0$ sia

$$\left| \int_{-z}^{z} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)^n dv - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si ricava allora per $\lambda \geq z_0$

$$\left| \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^\lambda z^{2n+1} \left\{ \int_{-z}^{z} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)^n dv \right\} dz - A \right| =$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \left| \int_0^\lambda z^{2n+1} \left\{ \int_{-z}^{z} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)^n dv - A \right\} dz \right|$$

$$< \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{z_0} z^{2n+1} \left\{ \int_{-z}^{z} |\varphi(v)| \left(1 - \frac{v^2}{z^2}\right)^n dv + |A| \right\} dz + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

se è $\lambda \geq \lambda_0$ sufficientemente grande.

Il lemma è perciò dimostrato.

LEMMA II. — *Se per la funzione* $\varphi(v)$, *definita per* $-\infty < v < \infty$ *e integrabile secondo* LEBESGUE *in ogni intervallo finito, si ha*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\int_0^\lambda \varphi(v)\, dv}{\lambda} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\int_0^\lambda \varphi(-v)\, dv}{\lambda} = 0$$

e inoltre

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) dv = A$$

finito, si ha anche

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a + bv}{\lambda^2}\right) dv = A$$

con a *e* b *costanti complesse arbitrarie.*

DIMOSTRAZIONE. — Bisogna provare che è

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v)\,(a + bv)\, dv = 0.$$

Ora, essendo

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v)\, dv = 0,$$

si ha anche

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^2} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v)\, dv = 0.$$

Posto poi

$$g(\lambda) = \int_0^{\lambda} \varphi(v)\, dv$$

si ricava

$$\frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda} v\, \varphi(v)\, dv = \frac{g(\lambda)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda} g(v)\, dv.$$

Il primo termine $\to 0$; quanto al secondo si osservi che, preso $\varepsilon > 0$, si può determinare λ_0 in modo che per $v \geq \lambda_0$ risulti

$$|g(v)| < \varepsilon v.$$

Si ha allora

$$\frac{1}{\lambda^2} \left| \int_0^{\lambda} g(v)\, dv \right| \leq \frac{1}{\lambda^2} \int_0^{\lambda_0} |g(v)|\, dv + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

per $\lambda \geq \lambda_1$ sufficientemente grande.

Allo stesso modo si ragiona per l'integrale

$$\frac{1}{\lambda^2} \int_{-\lambda}^{0} v\, \varphi(v)\, dv$$

e quindi si deduce la tesi.

LEMMA III. — *Se per la funzione* $\varphi(v)$, *definita per* $-\infty < v < \infty$ *e integrabile secondo* LEBESGUE *in ogni intervallo finito, risulta*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{\int_0^{\lambda} \varphi(v)\, dv}{\lambda} = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{\int_0^{\lambda} \varphi(-v)\, dv}{\lambda} = 0$$

e inoltre, per un valore intero positivo o nullo di n,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^n dv = A$$

finito, risulta anche

$$\lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^{n+1} dv = A.$$

Dimostrazione. — Si ha

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^{n+1} dv =$$

$$= \frac{1}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{\lambda} \left\{ \varphi(v)(\lambda^2 - v^2 + a + bv)^{n+1} + \varphi(-v)(\lambda^2 - v^2 + a - bv)^{n+1} \right\} dv$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{\lambda} \left\{ \varphi(v) \int_v^{\lambda} z(z^2 - v^2 + a + bv)^n dz + \varphi(-v) \int_v^{\lambda} z(z^2 - v^2 + a - bv)^n dz \right\} dv$$

$$+ \frac{1}{\lambda^{2(n+1)}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v)(a+bv)^{n+1} dv =$$

$$= \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{\lambda} z^{2n+1} \left\{ \int_{-z}^{z} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{z^2} + \frac{a+bv}{z^2}\right)^n dv \right\} dz +$$

$$+ \frac{1}{\lambda^{2(n+1)}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v)(a+bv)^{n+1} dv.$$

Allo stesso modo di quanto si è fatto per i lemmi I e II rispettivamente, si dimostra allora che è

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{2(n+1)}{\lambda^{2(n+1)}} \int_0^{\lambda} z^{2n+1} \left\{ \int_{-z}^{z} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{z^2} + \frac{a+bv}{z^2}\right)^n dv \right\} dz = A,$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda^{2(n+1)}} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v)(a+bv)^{n+1} dv = 0.$$

2. Una prima generalizzazione della formula di inversione di Riemann è contenuta nel seguente

Teorema I. — *Se la funzione* F(t), *definita per* $-\infty < t < \infty$ *e integrabile secondo* Lebesgue *in ogni intervallo finito, è trasformabile nella striscia* $\alpha < R(p) < \beta$ *del piano* $p = u + iv$, *posto*

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F(t)\, dt$$

si ha per quasi tutti i valori di t

$$F(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right) dp$$

dove come cammino di integrazione può prendersi il segmento $k - i\lambda$ $|-|$ $k + i\lambda$.

Se inoltre per un valore intero positivo o nullo di n *è*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right)^n dp = s_t$$

finito, si ha anche

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right)^{n+1} dp = s_t .$$

Dimostrazione. — *a)* Cominciamo col provare che, per quasi tutti i valori di t, risulta

$$F(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right) dp \qquad (6)$$

dove è $\alpha < k < \beta$.

Per questo cominciamo con l'osservare che, essendo $\alpha < k < \beta$, per un noto teorema [3]), l'integrale

[3]) V. (1), p. 42, Satz 3.

$$f(k+iv)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau} e^{-iv\tau} F(\tau)\, d\tau \tag{7}$$

converge uniformemente rispetto a v per $-\lambda \leq v \leq \lambda$.

Indicando poi con $I_\lambda(t)$ l'integrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1+\left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right) dp$$

si ha

$$I_\lambda(t)=\frac{e^{kt}}{2\pi}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt}\left(1-\frac{v^2}{\lambda^2}\right)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau} F(\tau)\, e^{-iv\tau}\, d\tau\right\} dv$$

$$=\frac{e^{kt}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau} F(\tau)\left\{\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iv(t-\tau)}\left(1-\frac{v^2}{\lambda^2}\right) dv\right\} d\tau$$

$$=\frac{2e^{kt}}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau}\,\frac{\operatorname{sen}\lambda(t-\tau)-\lambda(t-\tau)\cos\lambda(t-\tau)}{\lambda^2(t-\tau)^3}\, F(\tau)\, d\tau \tag{8}$$

essendo lecita l'inversione nell'ordine delle integrazioni, per la convergenza uniforme dell'integrale (7).

Poniamo ora, per $-\infty < z < \infty$,

$$\varphi_\lambda(z)=\frac{\operatorname{sen}\lambda z-\lambda z\cos\lambda z}{\lambda^2 z^3} \tag{9}$$

e scindiamo l'integrale $I_\lambda(t)$ in tre parti

$$I_{\lambda,1}(t)=\frac{2\,e^{kt}}{\pi}\int_{t+\pi}^{\infty} e^{-k\tau}\,\varphi_\lambda(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau$$

$$I_{\lambda,2}(t)=\frac{2\,e^{kt}}{\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} e^{-k\tau}\,\varphi_\lambda(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau$$

$$I_{\lambda,3}(t)=\frac{2\,e^{kt}}{\pi}\int_{-\infty}^{t-\pi} e^{-k\tau}\,\varphi_\lambda(t-\tau)\, F(\tau)\, d\tau.$$

Considerando dapprima l' integrale $I_{\lambda,1}(t)$ e fissato $\varepsilon > 0$, si determini $\tau_0 \geq t + \pi$ in modo che per $\tau_1 \geq \tau_0$ risulti

$$\left| \int_{\tau_0}^{\tau_1} e^{-\lambda\tau} F(\tau)\, d\tau \right| < \varepsilon. \tag{10}$$

Sia poi

$$\psi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} e^{-\lambda\tau} F(\tau)\, d\tau$$

e osserviamo che è, per la (9), $\varphi_\lambda(t-\tau) = \varphi_\lambda(\tau - t)$ e inoltre, per un dato valore di t,

$$\lim_{\tau \to \infty} \varphi_\lambda(\tau - t) = 0.$$

Si ricava allora, con un' integrazione per parti, tenendo conto della (10),

$$\int_{\tau_0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \varphi_\lambda(\tau - t) F(\tau)\, d\tau = -\int_{\tau_0}^{\infty} \psi(\tau)\, \varphi'_\lambda(\tau - t)\, d\tau. \tag{11}$$

Si ha poi

$$\varphi'_\lambda(z) = \frac{(\lambda^2 z^2 - 3) \operatorname{sen} \lambda z + 3\lambda z \cos \lambda z}{\lambda^2\ z^4}$$

e quindi, per $\lambda \geq 1$ e $|z| \geq 1$,

$$|\varphi'_\lambda(z)| < \frac{7}{z^2}.$$

Ne segue per la (11), siccome è $\tau_0 - t \geq \pi$,

$$\left| \int_{\tau_0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \varphi_\lambda(\tau - t) F(\tau)\, d\tau \right| < 7\,\varepsilon \int_1 \frac{dz}{z^2} = 7\,\varepsilon. \tag{12}$$

Si ha poi, per $\lambda \geq 1$,

$$\left| \int_{t+\pi}^{\tau_0} e^{-\lambda\tau} \varphi_\lambda(\tau - t) F(\tau)\, d\tau \right| \leq \frac{2}{\lambda_0} \int_{t+\pi}^{\tau_0} e^{-k\tau} \, | F(\tau) | \, d\tau$$

e quindi, per la (12),

$$\lim_{\lambda \to \infty} I_{\lambda,1}(t) = 0. \tag{13}$$

Allo stesso modo si dimostra che è

$$\lim_{\lambda \to \infty} I_{\lambda,3}(t) = 0. \tag{14}$$

Considerando ora l'integrale $I_{\lambda,2}(t)$, supponiamo dapprima $F(\tau) = 1$ per $t - \pi \leq \tau \leq t + \pi$, $F(\tau) = 0$ per $\tau > t + \pi$ e per $\tau < t - \pi$.

Posto allora

$$f_1(p) = \int_{t-\pi}^{t+\pi} e^{-p\tau}\, d\tau, \tag{15}$$

siccome l'integrale che definisce la $f_1(p)$ converge per qualsiasi valore di p, si ottiene per la formula di inversione di Riemann, qualunque sia k,

$$1 = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f_1(p)\, dp$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v)\, dv$$

dove è

$$\varphi(v) = \frac{1}{2\pi} e^{(k+iv)t} f_1(k + iv).$$

Per il lemma I sarà anche

$$1 = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) dv$$

e quindi, per la (15),

$$1 = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f_1(p) \left(1 + \left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right) dp$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{e^{kt}}{2\pi} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right) \left\{ \int_{t-\pi}^{t+\pi} e^{-k\tau} e^{-iv\tau} d\tau \right\} dv$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} \frac{2\, e^{kt}}{\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} e^{-k\tau} \varphi_\lambda(t-\tau)\, d\tau. \qquad (16)$$

Colla trasformazione $t - \tau = z$, si ricava dalla (16)

$$1 = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{kz} \varphi_\lambda(z)\, dz \qquad (17)$$

e inoltre

$$I_{\lambda,2}(t) = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{kz} F(t-z)\, \varphi_\lambda(z)\, dz. \qquad (18)$$

Siccome è

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{kz} F(t-z)\, \varphi_\lambda(z)\, dz =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t-z)\, \varphi_\lambda(z)\, dz + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (e^{kz} - 1)\, F(t-z)\, \varphi_\lambda(z)\, dz$$

e inoltre *), per $-\infty < z < \infty$,

---

*) Infatti, posto

$$\omega(x) = \frac{\operatorname{sen} x - x \cos x}{x^3}$$

si ha, per $|x| \geq 1$,

$$|\operatorname{sen} x - x \cos x|\, (1 + |x|)^2 < (1 + |x|)^3 \leq 8\, |x|^3$$

$$|\varphi_\lambda(z)| < \frac{8\lambda}{(1+\lambda|z|)^2} \tag{19}$$

si ottiene

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}(e^{kz}-1)\,\varphi_\lambda(z)\,F(t-z)\,dz\right| \leq 8\,|k|\,e^{|k\pi|}\int_{-\pi}^{\pi}|F(t-z)|\,\frac{\lambda|z|}{(1+\lambda|z|)^2}\,dz$$

$$\leq 8\,|k|\,e^{|k\pi|}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|F(t-z)|}{1+\lambda|z|}\,dz.$$

Fissato $\varepsilon > 0$ si prenda $\sigma > 0$ (dipendente da t) in modo che sia

$$\int_{-\sigma}^{\sigma}|F(t-z)|\,dz < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{20}$$

Si ha allora

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{|F(t-z)|\,dz}{1+\lambda|z|} \leq \int_{-\sigma}^{\sigma}|F(t-z)|\,dz + \frac{1}{1+\lambda\sigma}\int_{\sigma}^{\pi}\big(|F(t-z)|+|F(t+z)|\big)\,dz$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{21}$$

per $\lambda \geq \lambda_0$ sufficientemente grande.

Per le (13), (14), (17), (18), (21), e ricordando che e $\varphi_\lambda(z) = \varphi_\lambda(-z)$, la prima parte del teorema sarà dimostrata se proveremo che si ha

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\pi}\big(F(t+z)+F(t-z)-2F(t)\big)\,\varphi_\lambda(z)\,dz = 0$$

per quasi tutti i valori di t, con $-\infty < t < \infty$.

---

e, per $-1 < x < 1$,

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^3}\right| = \left|\frac{\cos\vartheta_1 x}{3!} - \frac{\cos\vartheta_2 x}{2!}\right| \leq \frac{2}{3} < \frac{8}{(1+|x|)^2}$$

con $$0 < \vartheta_1 < 1\ ,\ 0 < \vartheta_2 < 1.$$

Ne segue, per $-\infty < x < \infty$,

$$|\omega(x)| < \frac{8}{(1+|x|)^2}$$

e quindi la (19).

Posto poi

$$h(z) = \int_0^z | F(t+z) + F(t-z) - 2F(t) | \, dz \tag{22}$$

si ricava, per un noto teorema [3]) di LEBESGUE,

$$\lim_{z \to \infty} \frac{h(z)}{z} = 0 \tag{23}$$

per quasi tutti i valori di t, con $-\infty < t < \infty$.

Procedendo allora in modo noto [4]), si ottiene per le (19) e (22),

$$\left| \int_0^\pi \{ F(t+z) + F(t-z) - 2F(t) \} \varphi_\lambda(z) \, dz \right| \leq$$

$$\leq 8 \int_0^\pi | F(t+z) + F(t-z) - 2F(t) | \frac{\lambda}{(1+\lambda z)^2} \, dz$$

$$= \frac{8 \lambda h(\pi)}{(1+\lambda\pi)^2} + 16 \int_0^\pi h(z) \frac{\lambda^2}{(1+\lambda z)^3} \, dz.$$

Il primo termine $\to 0$; quanto al secondo, supponiamo che t sia un valore per cui abbia luogo la (23); preso allora $\varepsilon > 0$, si determini $\rho > 0$ in modo che per $0 < z \leq \rho$ sia $\frac{h(z)}{z} < \frac{\varepsilon}{2}$ e quindi

$$\int_0^\pi h(z) \frac{\lambda^2}{(1+\lambda z)^3} \, dz = \int_0^\rho h(z) \frac{\lambda^2}{(1+\lambda z)^3} \, dz + \int_\rho^\pi h(z) \frac{\lambda^2}{(1+\lambda z)^3} \, dz \leq$$

$$\leq \int_0^\rho \frac{h(z)}{z} \frac{\lambda}{(1+\lambda z)^2} \, dz + \frac{\lambda^2}{(1+\lambda\rho)^3} \int_0^\pi h(z) \, dz$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^2} + \frac{\lambda^2}{(1+\lambda\rho)^3} \int_0^\pi h(z) \, dz < \varepsilon$$

quando sia $\lambda \geq \lambda_1$ sufficientemente grande.

---

[3]) TONELLI L., *Serie trigonometriche*, Bologna, Zanichelli, 1928, pp. 174, 175.

[4]) V. (3), pp. 175, 176.

La prima parte del teorema è perciò dimostrata.

b) Siccome è

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p)\left(1+\left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right)^n dp = \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v)\left(1-\frac{v^2}{\lambda^2}\right)^n dv,$$

con

$$\varphi(v) = \frac{e^{(k+iv)t}}{2\pi} f(k+iv),$$

la seconda parte del teorema è immediata conseguenza del lemma I.

OSSERVAZIONE I. — *Se la funzione* F(t) *è continua in ogni punto di un intervallo finito* a |—| b, *si ha, per* n *intero positivo,*

$$F(t) = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p)\left(1+\left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right)^n dp$$

uniformemente per c ≤ t ≤ d, *con* a < c < d < b.

Infatti, posto

$$I_{\lambda,1}(t) = \frac{2\,e^{kt}}{\pi}\int_b^{\infty} e^{-k\tau}\,\varphi_\lambda(t-\tau)\,F(\tau)\,d\tau$$

$$I_{\lambda,2}(t) = \frac{2\,e^{kt}}{\pi}\int_a^{b} e^{-k\tau}\,\varphi_\lambda(t-\tau)\,F(\tau)\,d\tau$$

$$I_{\lambda,3}(t) = \frac{2\,e^{kt}}{\pi}\int_{-\infty}^{a} e^{-k\tau}\,\varphi_\lambda(t-\tau)\,F(\tau)\,d\tau$$

si ricava dalla dimostrazione del teorema I che è

$$\lim_{\lambda\to\infty} I_{\lambda,1}(t) = \lim_{\lambda\to\infty} I_{\lambda,3}(t) = 0$$

uniformemente per $c \leq t \leq d$.

Valgono poi le (20) e (21) (nelle quali si ponga $t-a$ e $t-b$ in luogo di π e $-\pi$ rispettivamente) uniformemente per $c \leq t \leq d$.

Infine si può, per l'uniforme continuità di $F(t)$ nell'intervallo $a \mid\!-\!\mid b$, determinare $\rho > 0$ in modo che qualunque sia t, con $c \leq t \leq d$, risulti

$$\frac{h(z)}{z} < \varepsilon$$

per $z \leq \rho$. Da ciò segue la tesi.

OSSERVAZIONE II. — *Se nel punto* t *la* F(t) *ha una discontinuità di prima specie, risulta*

$$\frac{1}{2}\left(F(t+) + F(t-)\right) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \left(\frac{p-k}{\lambda}\right)^2\right)^n dp.$$

3. Indichiamo ora una seconda generalizzazione della formula di inversione di RIEMANN.

Posto infatti

$$G_{n,\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i} e^{pt} f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^n dp,$$

dove n è un intero positivo o nullo, si ha il

TEOREMA II. — *Per quasi tutti i valori di* t *risulta*

$$F(t) = \lim_{\lambda \to \infty} G_{t,}\ (t).$$

Se poi, per un valore intero positivo o nullo di n, *si ha*

$$\lim_{\lambda \to \infty} G_{n,\lambda}(t) = s_t$$

finito, è anche

$$\lim_{\lambda \to \infty} G_{n+1,\lambda}(t) = s_t.$$

DIMOSTRAZIONE. — Per applicare i lemmi II e III cominciamo col pro-

vare che, per $-\infty < t < \infty$, si ha

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda e^{ivt} f(k + iv)\, dv = 0 \tag{24}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda e^{-ivt} f(k - iv)\, dv = 0. \tag{25}$$

Considerando la (24) e posto

$$g(\lambda) = \int_0^\lambda e^{ivt} f(k+iv)\, dv,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{g(\lambda)}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda e^{ivt} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau} e^{-iv\tau} F(\tau)\, d\tau \right\} dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau} F(\tau) \frac{e^{i\lambda(t-\tau)} - 1}{i\lambda(t-\tau)}\, d\tau \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau} \frac{1 - \cos\lambda(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)} F(\tau)\, d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau} \frac{\operatorname{sen}\lambda(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)} F(\tau)\, d\tau \\ &= i\, J_\lambda(t) + H_\lambda(t). \end{aligned} \tag{26}$$

Osserviamo ora che siccome l' integrale

$$f(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F(t)\, dt$$

converge nella striscia $\alpha < R(p) < \beta$, ed è $\alpha < k < \beta$, si può determinare $\sigma > 0$ in modo che sia anche

$$\alpha < k - \sigma < k + \sigma < \beta. \tag{27}$$

Consideriamo dapprima l' integrale $J_\lambda(t)$. Preso $\varepsilon > 0$, si determini

$T \geq |t| + 1$ in modo che per $\tau \geq T$ e per $\tau \leq -T$ si abbia rispettivamente

$$\left| \int_T^\tau e^{-(k-\sigma)\tau} F(\tau)\, d\tau \right| < \frac{\sigma}{5} \varepsilon \tag{28}$$

$$\left| \int_\tau^{-T} e^{-(k+\sigma)\tau} F(\tau)\, d\tau \right| < \frac{\sigma}{5} \varepsilon. \tag{29}$$

Abbiamo poi

$$\begin{aligned} J_\lambda(t) = & \int_T^\infty e^{-(k-\sigma)\tau} \frac{1-\cos\lambda(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)} e^{-\sigma\tau} F(\tau)\, d\tau \\ & + \int_{-T}^{T} e^{-k\tau} \frac{1-\cos\lambda(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)} F(\tau)\, d\tau \\ & + \int_{-\infty}^{-T} e^{-(k+\sigma)\tau} \frac{1-\cos\lambda(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)} e^{\sigma\tau} F(\tau)\, d\tau \\ & = J_{\lambda,1}(t) + J_{\lambda,2}(t) + J_{\lambda,3}(t). \end{aligned}$$

Posto ora

$$\vartheta(\tau) = e^{-\sigma\tau} \frac{1-\cos\lambda(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)} \tag{30}$$

si ricava

$$\vartheta'(\tau) = -\sigma e^{-\sigma\tau} \frac{1-\cos\lambda(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)} - e^{-\sigma\tau} \frac{\lambda(t-\tau)\,\mathrm{sen}\,\lambda(t-\tau) - 1 + \cos\lambda(t-\tau)}{\lambda(t-\tau)^2}$$

e quindi per $\lambda \geq 1$, supposto $|t-\tau| \geq 1$ e $\sigma \leq 1$,

$$|\vartheta'(\tau)| < (2\sigma + 3) e^{-\sigma\tau} \leq 5 e^{-\sigma\tau}. \tag{31}$$

Considerando l'integrale $J_{\lambda,1}(t)$ e posto

$$\psi(\tau) = \int_T^\tau e^{-(k-\sigma)\tau} F(\tau)\, d\tau$$

si ottiene, per le (28) e (31) e osservando che è, per la (30), $\lim\limits_{\tau \to \infty} \vartheta(\tau) = 0$

e inoltre $|t-\tau| \geq 1$,

$$|J_{\lambda,1}(t)| = \left| \int_T^\infty \psi(\tau)\, \vartheta'(\tau)\, d\tau \right| < \varepsilon. \tag{32}$$

In modo analogo, tenendo conto della (29), ricaviamo

$$\lim_{\lambda \to \infty} J_{\lambda,3}(t) = 0. \tag{33}$$

Siccome poi è, per $-\infty < z < \infty$,

$$\left| \frac{1-\cos z}{z} \right| < \frac{4}{1+|z|}$$

si ottiene

$$|J_{\lambda,2}(t)| \leq 4 \int_{-T}^{T} e^{-k\tau}\, |F(\tau)| \frac{d\tau}{1+\lambda\,|t-\tau|} \to 0 \tag{34}$$

come facilmente si dimostra.

Dalle (32), (33), (34), si ottiene

$$\lim_{\lambda \to \infty} J_\lambda(t) = 0.$$

Considerando poi l'integrale $H_\lambda(t)$ e tenendo conto della diseguaglianza

$$\left| \frac{\operatorname{sen} z}{z} \right| < \frac{2}{1+|z|}$$

si ricava, procedendo in modo analogo,

$$\lim_{\lambda \to \infty} H_\lambda(t) = 0$$

e quindi la (24) è provata.

Allo stesso modo si dimostra la (25).

Siccome poi risulta

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^n dp = \int_{-\lambda}^{\lambda} \varphi(v) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{k^2+2ikv}{\lambda^2}\right)^n dv,$$

con

$$\varphi(v) = \frac{e^{(k+iv)t}}{2\pi} f(k+iv),$$

la prima parte del teorema è conseguenza del teorema I e del lemma II, la seconda parte scende dal lemma III.

Osservazione I. — *Se indichiamo con* ν *una costante complessa arbitraria, dalla dimostrazione del teorema II segue, per* n *intero positivo,*

$$F(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} f(p) \left(1 + \left(\frac{p-\nu}{\lambda}\right)^2\right)^n dp$$

per quasi tutti i valori di t.

Osservazione II. — *Se la funzione* F(t) *è continua in tutti i punti dell'intervallo* a |—| b, *si ha, per* n *intero positivo,*

$$F(t) = \lim_{\lambda \to \infty} G_{n,\lambda}(t)$$

uniformemente per $c \leq t \leq d$, *con* $a < c < d < b$.

Osservazione III. — *Se nel punto* t *la* F(t) *presenta una discontinuità di prima specie, si ha, per* n *intero positivo,*

$$\frac{1}{2}\left(F(t+) + F(t-)\right) = \lim_{\lambda \to \infty} G_{n,\lambda}(t).$$

***

4. Dimostriamo due lemmi dei quali faremo uso per indicare una proprietà della formula generalizzata di Riemann.

Lemma IV. — *Se* m *e* n *sono due numeri interi non negativi, si ha, per* $\lambda t \neq 0$,

$$\left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} v^m \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^n dv \right| \leq \frac{K}{\lambda^{n-m} \, |t|^{n+1}}$$

dove K *è una costante positiva dipendente da* m *e da* n, *ma non da* λ *e da* t.

Dimostrazione. — Colla trasformazione $\frac{v}{\lambda} = x$, $\lambda t = z$, si ottiene

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} v^m \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^n dv = \lambda^{m+1} \int_{-1}^{1} e^{izx} x^m (1 - x^2)^n dx. \qquad (35)$$

Posto poi

$$g(x) = x^m (1 - x^2)^n$$

sarà

$$g(1) = g(-1) = g'(1) = g'(-1) = \ldots = g^{(n-1)}(1) = g^{(n-1)}(-1) = 0.$$

Si ha allora integrando per parti, se è $z \neq 0$,

$$\int_{-1}^{1} e^{izx} g(x)\, dx = \frac{i}{z} \int_{-1}^{1} e^{izx} g'(x)\, dx$$

$$= \left(\frac{i}{z}\right)^n \int_{-1}^{1} e^{izx} g^{(n)}(x)\, dx$$

$$= \left(\frac{i}{z}\right)^{n+1} \left\{ \int_{-1}^{1} e^{izx} g^{(n+1)}(x)\, dx - e^{iz} g^{(n)}(1) + e^{-iz} g^{(n)}(-1) \right\}.$$

Ne segue

$$\left| \int_{-1}^{1} e^{izx} g(x) dx \right| \leq \frac{1}{|z|^{n+1}} \left\{ \int_{-1}^{1} |g^{(n+1)}(x)|\, dx + |g^{(n)}(1)| + |g^{(n}(-1)| \right\}$$

$$= \frac{K}{|z|^{n+1}} \tag{36}$$

dove K è una costante positiva dipendente da m e da n, ma non da z.

Dalle (35) e (36) segue la tesi.

LEMMA V. — *Se* m *e* n *sono due interi non negativi, se è* $|t| \geq \delta > 0$, $\lambda \geq \delta$, *e se* a *e* b *sono due costanti complesse si ha*

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} v^m \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^n dv = \lambda^m \left(\frac{a+b\lambda}{\lambda^2}\right)^n \frac{e^{i\lambda t}}{it} - (-\lambda)^m \left(\frac{a-b\lambda}{\lambda^2}\right)^n \frac{e^{-i\lambda t}}{it} + \psi_\lambda(t)$$

dove è

$$|\psi_\lambda(t)| \leq \frac{H}{\lambda^{n-m} t^2}$$

e H *è una costante positiva dipendente da* δ, m, n, a, b, *ma non da* λ *e da* t.

DIMOSTRAZIONE. — Si ha, integrando per parti, se è $\lambda t \neq 0$,

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} v^m \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^n dv = \lambda^m \left(\frac{a+b\lambda}{\lambda^2}\right)^n \frac{e^{i\lambda t}}{it} - (-\lambda)^m \left(\frac{a-b\lambda}{\lambda^2}\right)^n \frac{e^{-i\lambda t}}{it} + \psi_\lambda(t)$$

dove si è posto

$$\psi_\lambda(t) = \frac{i}{t} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} \left\{ m v^{m-1} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^n + n v^m \left(\frac{-2v+b}{\lambda^2}\right) \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^{n-1} \right\} dv. \quad (37)$$

Ora se s e q sono due interi non negativi si deduce dal lemma IV, per $\lambda t \neq 0$,

$$\left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} v^q \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^s dv \right| \leq$$

$$\leq \sum_0^s{}_h \frac{\binom{s}{h}}{\lambda^{2h}} \left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} v^q (a+bv)^h \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^{s-h} dv \right|$$

$$\leq \sum_0^s{}_h \frac{\binom{s}{h}}{\lambda^{2h}} \sum_0^h{}_i \binom{h}{i} |a|^{h-i} |b|^i \left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} v^{q+i} \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2}\right)^{s-h} dv \right|$$

$$\leq \sum_0^s{}_h \frac{\binom{s}{h}}{\lambda^{2h}} \sum_0^h{}_i \binom{h}{i} |a|^{h-i} |b|^i \frac{K_{q+i,\, s-h}}{\lambda^{s-h-q-i} \, |t|^{s-h+1}} \quad (38)$$

dove con $K_{q+i,\, s-h}$ si indicano delle costanti positive dipendenti da $(q+i)$ e da $(s-h)$, ma non da λ e da t.

Dalla (38) si ricava per $|t| \geq \delta > 0$, $\lambda \geq \delta$,

$$\left| \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{ivt} v^q \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{a+bv}{\lambda^2}\right)^s dv \right| \leq \frac{\overline{K}}{\lambda^{s-q} \, |t|}$$

dove $\overline{K}$ è una costante positiva dipendente da δ, s, q, a, b, ma non da λ e da t.

Per la (37) si ricava allora la tesi.

5. Se la funzione $F(t)$ è assolutamente continua in ogni intervallo finito. trasformabile nella striscia $\alpha < R(p) < \beta$ e se per $\alpha < R(p) < \beta$ risulta

$$\lim_{t \to \pm\infty} e^{-pt} F(t) = 0$$

si ricava, con una integrazione per parti, che anche la derivata $F'(t)$ è trasformabile nella stessa striscia e che vale la nota formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F'(t)\, dt = p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F(t)\, dt.$$

Se r è un intero positivo, si ricava perciò dal teorema II, quasi ovunque,

$$F'(t) = \lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt}\, p\, f(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^r dp$$

$$= \lim_{\lambda \to \infty} G'_{r,\lambda}(t).$$

Dimostreremo ora che la formula di Riemann generalizzata permette di ottenere la $F'(t)$, o anche le derivate successive, se esistono, imponendo alla $F(t)$ condizioni relative soltanto a un intorno del punto t considerato.

Si ha infatti il

Teorema III. — *Se la funzione* $F(t)$, *integrabile secondo* Lebesgue *in ogni intervallo finito e trasformabile nella striscia* $\alpha < R(p) < \beta$, *è assolutamente continua nell'intervallo finito* $a \leq t \leq b$ *assieme alle sue derivate* $F'(t), F''(t), \ldots, F^{(n-1)}(t)$, *si ha*

$$F^{(n)}(t) = \lim_{\lambda \to \infty} G^{(n)}_{n+1,\lambda}(t)$$

quasi ovunque per $a \leq t \leq b$.

Dimostrazione. — Si ponga $F_1(t) = F(t)$ per $a \leq t \leq b$, $F_1(t) = 0$ per $t > b$ e per $t < a$; $F_2(t) = F(t) - F_1(t)$ per $-\infty < t < \infty$.

Sia poi

$$f_1(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F_1(t)\, dt = \int_a^b e^{-pt} F(t)\, dt \tag{39}$$

$$f_2(p) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-pt} F_2(t)\,dt = \int_{b}^{\infty} e^{-pt} F(t)\,dt + \int_{-\infty}^{a} e^{-pt} F(t)\,dt \tag{40}$$

$$\overline{f}(p) = \int_{a}^{b} e^{-pt} F^{(n)}(t)\,dt.$$

Siccome è

$$G^{(n)}_{n+1,\lambda}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n \{f_1(p)+f_2(p)\}\left(1+\frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp,$$

dimostreremo che si ha quasi ovunque, per $a \leq t \leq b$,

$$F^{(n)}(t) = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f_1(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp \tag{41}$$

e, per tutti i valori di t, con $a < t < b$,

$$0 = \lim_{\lambda\to\infty}\int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f_2(p)\left(1+\frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp. \tag{42}$$

Per dimostrare la (41) cominciamo con l'osservare che si ha, integrando per parti,

$$\overline{f}(p) = e^{-pb} F^{(n-1)}(b) - e^{-pa} F^{(n-1)}(a)$$
$$+ p\int_{a}^{b} e^{-pt} F^{(n-1)}(t)\,dt$$

e quindi, posto

$$a_m = F^{(n-m-1)}(a) \qquad\qquad b_m = F^{(n-m-1)}(b),$$

$$\overline{f}(p) = e^{-pb} \sum_{0}^{n-1} b_m p^m - e^{-pa} \sum_{0}^{n-1} a_m p^m + p^n \int_a^b e^{-pt} F(t)\, dt. \tag{43}$$

Dalle (39) e (43) si ricava

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f_1(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp = \frac{1}{2\pi i} \sum_{0}^{n-1} \Big\{ a_m \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{p(t-a)} p^m \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} -$$

$$- b_m \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{p(t-b)} p^m \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp \Big\} + \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} \overline{f}(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp.$$

Fissato t, con $a < t < b$, indichiamo con $\delta > 0$ il più piccolo dei numeri $t - a$ e $b - t$.

Si ha allora, per il lemma V, supposto $0 \leq m \leq n-1$ e $\lambda \geq \delta$,

$$\left| \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{p(t-a)} p^m \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp \right| \leq \frac{M}{\lambda^2} \tag{44}$$

$$\left| \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{p(t-b)} p^m \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp \right| \leq \frac{M}{\lambda^2} \tag{45}$$

dove M è una costante positiva dipendente da δ.

Siccome poi si ha quasi ovunque, per $a \leq t \leq b$,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} \overline{f}(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp = F^{(n)}(t),$$

per le (44) e (45), la (41) è dimostrata.

Per provare la (42) poniamo

$$f_2(p) = f_3(p) + f_4(p)$$

con

$$f_3(p) = \int_b^\infty e^{-pt} F(t)\, dt$$

$$f_4(p) = \int_{-\infty}^a e^{-pt} F(t)\, dt.$$

Supposto $a < t < b$ dimostreremo che è

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f_3(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp = 0 \tag{46}$$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f_4(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp = 0. \tag{47}$$

Osserviamo ora che si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n f_3(p) \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} dp =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\lambda}^{k+i\lambda} e^{pt} p^n \left(1 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right)^{n+1} \left\{ \int_b^\infty e^{-p\tau} F(\tau)\, d\tau \right\} dp$$

$$= \frac{e^{kt}}{2\pi} \int_b^\infty e^{-k\tau} F(\tau) \left\{ \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iv(t-\tau)} (k+iv)^n \left(1 - \frac{v^2}{\lambda^2} + \frac{k^2+2ikv}{\lambda^2}\right)^{n+1} dv \right\} d\tau$$

$$= \frac{e^{(k+i\lambda)t}}{2\pi i} (k+i\lambda)^n \left(\frac{k^2+2ik\lambda}{\lambda^2}\right)^{n+1} \int_b^\infty e^{-(k+i\lambda)\tau} \frac{F(\tau)}{t-\tau}\, d\tau -$$

$$- \frac{e^{(k-i\lambda)t}}{2\pi i} (k-i\lambda)^n \left(\frac{k^2-2ik\lambda}{\lambda^2}\right)^{n+1} \int_b^\infty e^{-(k-i\lambda)\tau} \frac{F(\tau)}{t-\tau}\, d\tau +$$

$$+ \frac{e^{kt}}{2\pi} \int_b^\infty e^{-k\tau} F(\tau)\, \mathfrak{I}_\lambda (t-\tau)\, d\tau \tag{48}$$

dove si è posto

$$\vartheta_\lambda(t-\tau) = \frac{i}{t-\tau}\int_{-\lambda}^{\lambda} e^{iv(t-\tau)} \left\{ in(k+iv)^{n-1}\left(1-\frac{v^2}{\lambda^2}+\frac{k^2+2ikv}{\lambda^2}\right)^{n+1} + \right.$$

$$\left. +(n+1)(k+iv)^n\left(\frac{-2v+2ik}{\lambda^2}\right)\left(1-\frac{v^2}{\lambda^2}+\frac{k^2+2ikv}{\lambda^2}\right)^n \right\} dv. \qquad (49)$$

Essendo $|t-\tau| \geq \delta > 0$ e supposto $\lambda \geq \delta$, si ricava, per il lemma V,

$$|\vartheta_\lambda(t-\tau)| \leq \frac{H_1}{\lambda(t-\tau)^2} \qquad (50)$$

dove H_1 è una costante positiva dipendente da δ, ma non da τ e da λ.

Per la (49) e per il lemma V si ha poi, per $|t-\tau| \geq \delta$, $\lambda \geq \delta$

$$|\vartheta'_\lambda(t-\tau)| \leq \frac{H_2}{(t-\tau)^2} \qquad (51)$$

dove la costante positiva H_2 dipende da δ, ma non da τ e da λ.

Osserviamo ora che siccome nel semipiano $R(p) > \alpha$ l'integrale

$$\int_b^\infty e^{-p\tau} F(\tau)\,d\tau$$

esiste finito e siccome la funzione $\frac{1}{\tau-t}$ è decrescente e $\to 0$ per $\tau \to \infty$, ed è inoltre $\tau - t \geq \delta > 0$, per un noto criterio l'integrale

$$\int_b^\infty e^{-p\tau} \frac{F(\tau)}{\tau-t}\,d\tau$$

esiste finito nello stesso semipiano.

Si ha poi $\alpha < k$ e quindi si può determinare $\sigma > 0$ in modo che sia $\alpha < k - \sigma$.

Fissato $\varepsilon > 0$ si determini il numero positivo $T \geq b$ in modo che per $\tau \geq T$ risulti

$$\left| \int_T^\tau e^{-(k-\sigma)\tau} \frac{F(\tau)}{\tau-t}\,d\tau \right| < \frac{\sigma\varepsilon}{2}. \qquad (52)$$

Posto poi

$$\psi(\tau) = \int_T^\tau e^{-(k-\sigma)\tau} \frac{F(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \tag{53}$$

si ricava, tenendo conto della (52),

$$\frac{1}{\lambda}\left| \int_T^\infty e^{-(k+i\lambda)\tau} \frac{F(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \right| = \frac{1}{\lambda}\left| \int_T^\infty e^{-(\sigma+i\lambda)\tau}\, e^{-(k-\sigma)\tau} \frac{F(\tau)}{\tau - t}\, d\tau \right|$$

$$= \frac{|\sigma + i\lambda|}{\lambda}\left| \int_T^\infty e^{-(\sigma+i\lambda)\tau}\, \psi(\tau)\, d\tau \right| < \frac{|\sigma + i\lambda|}{\lambda}\,\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{54}$$

per $\lambda \geq \lambda_0$ sufficientemente grande.

Si ha poi

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \int_b^T e^{-(k+i\lambda)\tau} \frac{F(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = 0. \tag{55}$$

In modo analogo si dimostra che è

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\lambda} \int_b^\infty e^{-(k-i\lambda)\tau} \frac{F(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = 0. \tag{56}$$

Per le (54), (55), (56) si ricava che, per n intero non negativo, i primi due termini della (48) $\to 0$.

Considerando ora il terzo termine, fissato $\varepsilon > 0$ si determini il numero $\xi \geq b$ in modo che per $\tau \geq \xi$ risulti

$$\left| \int_\xi^\tau e^{-k\tau} F(\tau)\, d\tau \right| < \frac{\varepsilon\,\delta}{H_3}. \tag{57}$$

Posto poi

$$Y(\tau) = \int_\xi^\tau e^{-k\tau} F(\tau)\, d\tau,$$

e osservando che, per la (50), si ha $\lim\limits_{\tau \to \infty} \vartheta_\lambda(t - \tau) = 0$, si ottiene, tenendo

conto delle (51) e (57),

$$\left| \int_{\xi}^{\infty} e^{-k\tau} F(\tau) \vartheta_\lambda (t-\tau)\, d\tau \right| = \left| \int_{\xi}^{\infty} Y(\tau) \vartheta'_\lambda (t-\tau)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq \varepsilon\delta \int_{\xi}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau-t)^2} \leq \varepsilon\delta \int_{\delta}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \varepsilon. \qquad (58)$$

Si ha poi per la (50)

$$\left| \int_{b}^{\xi} e^{-k\tau} F(\tau) \vartheta_\lambda (t-\tau)\, d\tau \right| \leq \frac{H_1}{\lambda\, \delta^2} \int_{b}^{\xi} e^{-k\tau} \mid F(\tau) \mid d\tau \to 0.$$

La (46) è perciò dimostrata.

In modo analogo si dimostra la (47) e quindi il teorema.

OSSERVAZIONE I. — *Se la funzione* $F^{(n)}(t)$ *è continua in tutti i punti dell'intervallo* a |—| b, *si ha*

$$F^{(n)}(t) = \lim_{\lambda \to \infty} G^{(n)}_{n+1,\lambda}(t)$$

uniformemente per $c \leq t \leq d$, *con* $a < c < d < b$.

OSSERVAZIONE II. — *Se in un punto* t *interno all'intervallo* a |—| b *la* $F^{(n)}(t)$ *ha una discontinuità di prima specie, risulta*

$$\frac{1}{2}\bigl(F(t+) + F(t-)\bigr) = \lim_{\lambda \to \infty} G^{(n)}_{n+1,\lambda}(t).$$

Schema statistico di evoluzione e di selezione in una collettività a monoibridismo mendeliano

Nota del socio corr. **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 3 febbraio 1940 - XVIII)

Sunto (ed impostazione). — Ricollegandoci a nostre precedenti ricerche statistiche e demografiche pubblicate in questi Rendiconti, abbiamo ora preso in esame un fondamentale problema di genetica. Abitualmente, per avere i tipici rapporti mendeliani nel mono-ibridismo, si parte da omozigoti; si incrociano questi fra loro; la discendenza eterozigota viene di nuovo incrociata ed esaminata nella sua struttura genotipica e fenotipica.

Noi ci siamo posti invece il problema seguente di cui un caso particolare è quello ben noto di ereditarietà dei gruppi sanguigni.

Costituita una certa collettività originaria (composta con i tre genotipi fondamentali di un monoibridismo in una data proporzione), si incrocino i suoi componenti in tutti i modi possibili — (o per lo meno si considerino incroci effettivi, fra ciascun genotipo con se stesso e con gli altri, proporzionali a quelli possibili). Si ha una prima generazione di discendenti che mostrerà un'altra certa composizione rispetto ai genotipi ora detti. Su questa prima generazione si proceda in modo analogo, ottenendo una seconda; e così via.

Quale è l'evoluzione delle successive generazioni? Verso quale tipo di composizione tendono? *Si intende che gli incroci sono retti dalla legge di* Mendel.

Occorre altresì notare che, a queste deduzioni si può dare una forma probabilistica, che è la più consona alla natura stessa del problema (e lo faremo in effetti).

In tal guisa, tutti i rapporti di composizione teorici si rivelano come probabilità; e le frequenze effettivamente riscontrate sono ad essi rilegate dalla legge dei grandi numeri; ciò vale tanto per gli accoppiamenti, quanto per i discendenti.

La domanda va completata con una ulteriore precisazione; occorre cioè dire:

I. Se i caratteri non sono oppur sono collegati a cause di maggiore o minore fecondità, di maggiore o minore vitalitá (fattori di sterilità totale o parziale, di letalità totale o parziale).

II. Nel caso affermativo, diremo che nella collettivitá vi è « autoseluzione »; ed occorre distinguere i casi di auto-seluzione dovuti al gene; quelli dovuti al genotipo; essi sono distinti da quelli dovuti a selezione esterna sul genotipo.

Con queste premesse,, e con l'introduzione del concetto di collettività ad assetto permanente o staticamente stabile (che cioè si riproduce immutata nella sua composizione) e di quella dinamicamente stabile (tale che, oltre ad essere staticamente stabile, elimina ogni perturbazione ritornando asintoticamente al suo

assetto originario) è completata l'analisi statistica e genetica dell'evoluzione della collettività originaria.

È bene notare, infine, che una interpretazione probabilistica giustifica queste premesse; e che le conseguenze sono logicamente dedotte da esse e dalla legge di Mendel. Comunque esse conseguenze — come si può confrontare — sono d'accordo con molti risultati sperimentali già acquisiti.

Le deduzioni così ottenute sono riportate, per riassunto, nell'ultimo paragrafo sotto la voce « *Conclusioni* ».

È possibile dare a queste conclusioni una perspicua veste geometrica: Ogni punto del piano corrisponde ad una collettività; certe curve, invece, alle leggi di selezione: ed allora le leggi acquistano un semplice enunciato geometrico.

§ 1. *Premesse*

Si abbia in esame, in un certo istante, una collettività K di individui. Essa venga esaminata rispetto ad un certo carattere allelomorfo trasmissibile per eredità mendeliana.

Sia A tale carattere (dominante, nel senso della genetica), a il suo allelomorfo recessivo: esso carattere sia semplice, indipendente.

La collettività risulti distribuita — rispetto al carattere detto — rispetto ai genotipi $\Gamma_0 \equiv (AA)$, $\Gamma_1 \equiv (Aa)$, $\Gamma_2 \equiv (aa)$, di cui il primo è omozigote dominante; l'ultimo, omozigote recessivo; il medio eterozigote. La composizione di K sia data dallo schema di distribuzione;

$$\left\{\begin{array}{lccc} \text{gruppo genotipico} : & \Gamma_0 , & \Gamma_1 , & \Gamma_2 \\ \text{numero di individui} : & n_0 , & 2n_1 , & n_2 \end{array}\right\} \equiv K.$$

Gli individui sieno bisessuati (tipo piante) sì da permettere tutti gli incroci possibili.

Naturalmente non tutti questi incroci possibili avvengono effettivamente; ammetteremo *che quelli effettivamente verificatisi sieno proporzionali ai possibili in ogni categoria;* sicchè gli incroci effettivamente verificatisi sono tipicamente rappresentativi di quelli teorici possibili.

Premesse le leggi di Mendel, noi dovremo incrociare ogni genotipo con se stesso e con ogni altro; tener conto degli accoppiamenti possibili di A ed a, e disgiungere poi nei diversi genotipi, il prodotto.

Ammettiamo inoltre che la fecondità di uno di questi incroci sia la stessa (in media e statisticamente) di qualsiasi altro: sicchè da ogni coppia di individui di K si abbiano nuovi individui della prima generazione K' in numero di f. È questo il primo caso che vogliamo trattare esaminando la composizione delle collettività K', K'', ... ottenute come successive generazioni dal ceppo originario K.

Il complesso di genotipi Γ_i incrociato con Γ_j dà un numero di elementi di K' pari ad $f.\ n_i . n_j$; e se $i = j$ occorre solo considerare $\Gamma_i \times \Gamma_j$, mentre se $i \neq j$, occorre considerare tanto $\Gamma_i \times \Gamma_j$, quanto $\Gamma_j \times \Gamma_i$; sicchè i discendenti di $\Gamma_i \times \Gamma_j$ e di $\Gamma_j \times \Gamma_i$ saranno $2fn_i\ n_j$.

È chiaro che la nuova collettività K', avrà a sua volta lo schema di composizione

$$\left\{ \begin{matrix} \Gamma'_0 & , & \Gamma'_1 & , & \Gamma'_2 \\ n'_0 & , & 2n'_1 & , & n'_2 \end{matrix} \right\} \equiv K'.$$

Ora gli individui formanti Γ'_0, omozigoti dominanti, provengono: da tutti gli accoppiamenti $\Gamma_0 \times \Gamma_0$ (dominanti puri); da metà degli accoppiamenti $\Gamma_0 \times \Gamma_1$ e da metà di quelli $\Gamma_1 \times \Gamma_0$ (dominanti eterozigoti): da un quarto degli accoppiamenti $\Gamma_1 \times \Gamma_1$. Un ragionamento analogo eseguito sugli incroci degli altri genotipi, mostra che causa la disgiunzione mendeliana, si avrà:

$$\left\{ \begin{aligned} n'_0 &= f \cdot (n_0 + n_1)^2 \\ n'_1 &= f \cdot (n_0 + n_1)\,(n_1 + n_2)\,. \\ n'_2 &= f \cdot (n_1 + n_2)^2 \end{aligned} \right. \qquad \{G\}$$

In sostanza queste formole G, danno le relazioni fra i numeri n di una generazione originaria e quelli n' dei suoi immediati discendenti.

Nel passaggio alla seconda generazione, basta applicare le stesse formule, sostituendo n'' ad n' ed n' ad n; e così via.

Per ottenere in modo più compatto tali formule, prendiamo *quì sempre* a considerare i rapporti numerici delle n_0, n_1 ad n_2; in tal modo esamineremo anche le variazioni dei fenotipi, che comprendono appunto $\Gamma_0 + \Gamma_1$ e Γ_2, riferite alla linea pura recessiva assuntone come unitario il numero di individui per la prima generazione:

Pertanto: posto per il ceppo originario,

$$\frac{n_0}{n_2} = \lambda \quad ; \quad \frac{n_1}{n_2} = \mu\,;$$

per la prima generazione

$$\frac{n'_0}{n'_2} = \lambda' \quad ; \quad \frac{n'_1}{n'_2} = \mu' \quad ; \ldots$$

e così via, risulteranno gli schemi di successive composizioni:

$$(\lambda \ , \ 2\mu \ , \ 1) \equiv K$$
$$(\lambda' \ , \ 2\mu' \ , \ 1) \equiv K'$$
$$(\lambda'' \ , \ 2\mu'' \ , \ 1) \equiv K''$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

mentre il numero complessivo di individui è dato da:

$$\begin{aligned} n &= (n_0 + 2n_1 + n_2) \\ n' &= (n'_0 + 2n'_1 + n''_2) = f \cdot n^2 = \omega \cdot n \\ n'' &= (n''_0 + 2n''_1 + n''_2) = f \cdot n'^2 = f^{1+2} \cdot n^4 = \omega' n' = \omega\omega' n \\ & \dots \end{aligned}$$

con ω coefficiente di accrescimento.

§ 2. *L'evoluzione delle collettività.*

Con queste premesse, si vede agevolmente che le formule G dànno

$$\lambda' = \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu + 1}\right)^2 \quad ; \quad \mu' = \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu + 1}\right) \qquad \{G^*\}$$

e che pertanto, qualunque sieno λ, μ, sarà *sempre*:

$$\lambda' = (\mu')^2.$$

Ma allora, siccome dalle G^* si ottiene per ricorrenza anche:

$$\lambda'' = \left(\frac{\lambda' + \mu'}{\mu' + 1}\right)^2 \quad ; \quad \mu'' = \left(\frac{\lambda' + \mu'}{\mu' + 1}\right) \quad ; \quad \lambda'' = (\mu'')^2,$$

si ricaverà successivamente:

$$\left\{ \begin{aligned} \lambda'' &= \left(\frac{\mu'^2 + \mu'}{\mu' + 1}\right)^2 = \mu'^2 = \lambda' \\ \mu'' &= \frac{\mu'^2 + \mu'}{\mu' + 1} = \mu'. \end{aligned} \right.$$

Ciò importa, per ricorrenza, che:

$$\begin{aligned} &\mu' = \mu'' = \mu''' \dots \\ &\lambda' = \lambda'' = \lambda''' \dots \qquad = (\mu')^2, \end{aligned}$$

e che quindi dalla prima generazione, dopo la originaria, tutte le successive conservano la stessa composizione.

Dunque:

In una collettività di monoibridi mendeliani bisessuati, nella quale sono possibili (e si effettuano, in realtà, proporzionalmente) tutti gli accoppiamenti fra individui, le successive generazioni devono mostrare una composizione permanente secondo lo schema di distribuzione:

$$\left\{ \begin{matrix} \Gamma_0 \, , & \Gamma_1 \, , & \Gamma_2 \\ \alpha^2 \, , & 2\alpha \, , & 1 \end{matrix} \right\} ;$$

dove

$$\alpha = \mu' = \frac{n_0 + n_1}{n_1 + n_2},$$

si ricava dalla collettività originaria.

Ne segue che anche il rapporto dei fenotipi è invariabile ed è dato da $\alpha \cdot (\alpha + 2)$, salvo, si intende, la generazione — ceppo.

Nel caso che la collettività originaria fosse un clone — cioè un ceppo puro — si aveva $n_0 \neq 0$, $n_1 = n_2 = 0$; oppure $n_0 = n_1 = 0$; $n_2 \neq 0$.

Nella prima alternativa $\alpha = \infty$, sicchè mutando i rapporti (cioè assumendo unitaria la Γ_0) si ritrova — come doveva essere — che le generazioni successive contengono *solo* elementi di Γ_0; nella seconda alternativa invece $\alpha = 0$ e le successive generazioni contengono *solo* elementi di Γ_2.

Se invece $n_0 = n_1 = n_2$, allora $\alpha = 1$, sicchè tutte le generazioni successive presentano *sempre* la stessa distribuzione (1, 2, 1).

Se infine $n_0 = n_2 = 0$, $n_1 \neq 0$, risulta ancora $\alpha = 1$; *sicchè tutti i discendenti di sole coppie di individui, eterozigoti, costituiscono la solita distribuzione genotipica* (1, 2, 1) *cui corrisponde quella fenotipica* (3, 1), *ben nota.*

§ 3. *La selezione esterna.*

Seguiamo ora una catena di collettività analoga a quella ora studiata, ma *selezionandola* in ogni generazione con la sua stessa legge. Ciò significa ridurre per soppressione proporzionale in un rapporto costante i discendenti che hanno lo stesso fenotipo; e quindi equivale a ridurre i fattori f in un certo rapporto. E precisamente sia ρ il fattore che opera su Γ_0, Γ_1 (*indiscernibili perchè sono lo stesso fenotipo*) σ quello che opera su Γ_2. Per ricavare il passaggio da una generazione alla successiva, tenuto conto di tali riduzioni, alle formule $\{G^*\}$ occorre sostituire le :

$$\lambda' = \frac{\rho}{\sigma} \cdot \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu + 1}\right)^2 \quad ; \quad \mu' = \frac{\rho}{\sigma} \left(\frac{\lambda + \mu}{\mu + 1}\right) \quad ; \quad \lambda' = \frac{\sigma}{\rho} \cdot (\mu')^2 \qquad \{\overline{G}\}$$

cioè porre:

$$\lambda' = h\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu + 1}\right)^2 \quad ; \quad \mu' = h\left(\frac{\lambda + \mu}{\mu + 1}\right) \quad ; \quad \lambda' = \frac{(\mu')^2}{h} \quad ; \quad h = \frac{\rho}{\sigma}$$

che valgono anche nel passaggio da $K^{(r)}$ a $K^{(r+1)}$.

È facile verificare che vale successivamente la

$$\lambda^{(r)} = \frac{(\mu^{(r)})^2}{h}$$

ma che si ha:

$$\mu^{(r+1)} = \mu^{(r)} + (h-1)\frac{\mu^{(r)}}{h\mu^{(r)}+1} = \mu^{(r)}\left[1 + \frac{h-1}{h\mu^{(r)}+1}\right]. \qquad \{H\}$$

Se $h = 1$, e quindi $\rho = \sigma$ (cioè la riduzione avviene proporzionalmente ed egualmente sui due fenotipi) si ricade nel caso precedente di una collettività a composizione permanente dalla prima generazione in poi.

La generazione r-sima, $K^{(r)}$ ha la composizione

$$K^{(r)} \equiv \left\{ \frac{(\mu^{(r)})^2}{h}, \; 2\mu^{(r)}, \; 1 \right\}$$

con le μ legate per ricorrenza dalla relazione H.

Se invece $h \neq 1$, la collettività non è permanente, ma evolve. Bisogna escludere il caso che sia $\mu = 0$ o $\mu = \infty$, nel quale caso si tratta di linea pura (omozigote) permanente.

L'evoluzione avviene diversamente a seconda di $h > 1$ oppure di $h < 1$.

Nel primo caso risulta $\mu^{(r+1)} > \mu^{(r)}$; quindi le μ formano una successione crescente. Se questa ammettesse un limite finito μ^*, tale limite caratterizzerebbe la composizione di una collettività permanente. Ma questa, per $h \neq 1$, non esiste, a meno che non si tratti di una linea pura; dunque $\mu^{(r)} \to \infty$ e la collettività evolve verso il solo tipo Γ_0, omozigote dominante.

Nel secondo caso, $h < 1$, risulta sempre $\mu^{(r+1)} < \mu^{(r)}$, quindi le μ formano una successione positiva decrescente. Se questa ammettesse un limite non nullo, sarebbe caratterizzata una collettività permanente, il che non può essere. Dunque il limite della $\mu^{(r)}$ è lo zero, e la collettività verso la quale evolvono le successive generazioni è quella Γ_2, linea pura recessiva.

Pertanto, come conferma qualitativamente l'esperienza; possiamo dire:

I. *Se nelle successive generazioni riduciamo in proporzione fissa uno solo dei due fenotipi, la collettività evolve verso quella pura costituita dal genotipo omozigote non ridotto.*

II. *La tendenza è subito accelerata dalla soppressione totale di un fenotipo.*

In tal caso la soppressione del fenotipo dominante rende subito pura la linea residua, che è insieme geno e fenotipo recessivo; la soppressione del fenotipo recessivo invece accelera al massimo la evoluzione della linea ibrida residua verso il genotipo dominante; senza però mai poterne assicurare la totale purificazione.

III. *Appena cessa la causa selezionante, ritorna una formazione permanente e riappare l'altro fenotipo — in rapporto modificato come è ovvio.*

Basta partire da una composizione (1, 2, 1) originaria e porre $h = \frac{1}{2}$

per avere alla prima generazione $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$; alla seconda $\left(\frac{2}{9}, \frac{2}{3}, 1\right)$; alla terza $\left(\frac{1}{10}, \frac{4}{10}, 1\right)$; alla quarta circa $\left(\frac{3}{100}, \frac{1}{4}, 1\right)$: si intende come risultato teorico, da essere controllato sperimentalmente.

Esamineremo successivamente gli effetti di caratteri aventi influenza selettiva (caso limite: fattori letali) o influenza di fecondità (caso limite: infecondità); ed a tale ricerca, premetteremo una analoga a questa ora svolta, ma riferentesi all' eredità intermedia.

§ 4. *Confronto fra discendenze di varie scelte di collettività originaria.*

Le collettività di discendenza di un solo genotipo sono ben note; più generalmente esaminiamo adesso le diverse possibilità di discendenze da individui di una sola coppia di genotipi. Vi sono 6 possibilità, cioè: coppie omogame: $\Gamma_0 \times \Gamma_0$, $\Gamma_1 \times \Gamma_1$, $\Gamma_2 \times \Gamma_2$ coppie eterogame: $\Gamma_0 \times \Gamma_1$, $\Gamma_0 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$. Si hanno pertanto per $n_0, 2n_1, n_2$, le possibilità:

$$K_{00} \equiv (2, 0, 0) \; ; \; K_{11} \equiv (0, 2, 0) \; ; \; K_{22} \equiv (0, 0, 2)$$
$$K_{01} \equiv (1, 1, 0) \; ; \; K_{02} \equiv (1, 0, 1) \; ; \; K_{12} \equiv (0, 1, 1).$$

Indichiamo con Φ_0, Φ_2 i due fenotipi; se formiamo con gli schemi dianzi indicati le generazioni discendenti K', si trovano per queste le composizioni genotipiche

$K'_{00} \equiv (1, 0, 0)$ linea pura omozigote dominante ; dal $\Phi_0 \times \Phi_0$
$K'_{11} \equiv (1, 2, 1)$ collettività mendeliana tipica ; dal $\Phi_0 \times \Phi_0$
$K'_{22} \equiv (0, 0, 1)$ linea pura omozigote recessiva ; dal $\Phi_2 \times \Phi_2$
$K'_{01} \equiv (9, 6, 1)$ collettività mendeliana ; dal $\Phi_0 \times \Phi_0$
$K'_{0,2} \equiv (1, 2, 1)$ collettività mendeliana tipica ; dal $\Phi_0 \times \Phi_2$
$K'_{1,2} \equiv \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{3}, 1\right)$ collettività mendeliana ; dal $\Phi_0 \times \Phi_2$.

In quanto ai fenotipi Φ_0, Φ_2, osserviamo appunto che $\Gamma_0 \times \Gamma_0$; $\Gamma_0 \times \Gamma_1$, $\Gamma_1 \times \Gamma_1$ si presentano come incroci del fenotipo dominante con se stesso $\Phi_0 \times \Phi_0$; $\Gamma_0 \times \Gamma_2$, $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ come incrocio dei due fonotipi $\Phi_0 \times \Phi_2$; mentre solo $\Gamma_2 \times \Gamma_2$ come incrocio del recessivo con sè stesso, $\Phi_2 \times \Phi_2$.

Dunque, incrociando due collettività che sono genotipiche e fenotipiche assieme si ha:

1) *L' incrocio di due fenotipi dominanti può dare come risultato: o una collettività di genotipo dominante puro (assenza del recessivo puro) o una collettività mendeliana nella quale il fenotipo dominante sta a quello recessivo nel rapporto* 15 : 1.

o una collettività mendeliana tipica, con rapporto 3 : 1 *dei due fenotipi.*

II) *L'incrocio di un fenotipo dominante con uno recessivo può dare come risultato:*

o una collettività mendeliana tipica, con rapporto 3 : 1 *dei due fenotipi*

o una collettività nella quale il fenotipo dominante sta a quello recessivo come 7 : 9.

III) *L'incrocio di due fenotipi recessivi dà come risultato una linea recessiva pura.*

Si intende bene che deve essere stato riconosciuto, in precedenza, che ciascun fenotipo incrociato corrisponde ad *un* solo genotipo.

Dobbiamo inoltre rilevare un fatto caratteristico e che può indurre in errore nelle applicazioni pratiche. Le collettività K', K'', ... discendenti da una originaria K formata con scelta arbitraria, presentano tutte la composizione permanente genotipica:

$$(\lambda^2 \, , \, 2\lambda \, , \, 1)$$

e quella permanente fenotipica

$$\{\lambda(\lambda+2) \, , \, 1\}.$$

Quindi, in apparenza, non sembra ritrovarsi la legge di discendenza mendeliana per carattere dominante completo.

Osserviamo però che nel passaggio da K a K' è stato precisamente mantenuta la legge mendeliana. Allora, per confermare che si tratta di tale eredità conviene, in un certo stadio, separare i due fenotipi: quello recessivo darà una linea pura; quello misto del genotipo omozigote dominante ed è quello eterozigote, avrà la composizione genotipica

$$(\lambda^2 \, , \, 2\lambda \, , \, 0).$$

Notiamo che noi qui *non* selezioniamo in ogni generazione egualmente; ma ci limitiamo a sopprimere, in una certa generazione a composizione stabile, il genotipo recessivo.

Questa collettività, così modificata, è quindi assunta come nuovo capostipite $\overline{K}$, si presenta nella generaziono successiva la distribuzione

$$\overline{K'} \equiv (\lambda^{*2} \, , \, 2\lambda^* \, , \, 1)$$

con

$$\lambda'^* = \lambda + 1.$$

Dunque mentre nelle generazioni $K', K''\ldots$ i due fenotipi avevano la distribuzione fenotipica

$$\{\lambda(\lambda+2)\,,\,1\} = \{\lambda^2+2\lambda\,,\,1\}$$

in quelle $\overline{K}'$, $\overline{K}''$,... avranno la distribuzione fenotipica

$$\{\lambda^{*2}+2\lambda^*\,,\,1\} = \{\lambda^2+4\lambda+3\,,\,1\}.$$

Sicchè la differenza fra i due rapporti: fenotipo dominante diviso fenotipo recessivo, permette appunto di calcolare λ, poichè tale differenza è eguale a $2\lambda+3$. Il verificarsi di tali contingenze numeriche assicura appunto la validità ed il verificarsi di monoibridismo mendeliano.

§ 5. *Deduzione probabilistica degli schemi sviluppati e sue conseguenze.*

Dello schema statistico sviluppato sinora si può anche dare una interpretazione probabilistica: e ciò seguendo il procedimento da noi assegnato nella nostra ultima nota di questo Rendiconto, per la quale ogni individuo possedente un certo carattere è considerato come portatore di «quanti» di questo carattere.

Anzitutto, per giustificare la legge quadratica di formazione della discendenza, osserviamo che, nella K, la probabilità di appartenenza di un generico individuo alla $\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$ è rispettivamente

$$p_0 = \frac{n_0}{n_0+2n_1+n_2} \quad ; \quad p_1 = \frac{2n_1}{n_0+2n_1+n_2} \quad ; \quad p_2 = \frac{n_2}{n_0+2n_1+n_2}.$$

Pertanto, le probabilità di un accoppiamento (individuo di secondo ordine), nelle categorie $\Gamma_0 \times \Gamma_0$; $\Gamma_0 \times \Gamma_1 + \Gamma_1 \times \Gamma_0 ; \ldots$ sono date precisamente da

$$p_0^2\,,\,2p_0\,p_1\,,\,p_1^2\,,\ldots;$$

e siccome noi supponiamo che gli accoppiamenti effettivi avvengano in modo rappresentativo (proporzionale addirittura) rispetto a quelli possibili, ne consegue la detta legge quadratica.

Inoltre, osserviamo che nella collettività K vi sono, portati dai singoli individui,

$$2hn_0 + 2hn_1 = 2h(n_0+n_1)$$

unità del carattere A: perchè in Γ_0 ogni individuo ne porta $2h$, mentre in Γ_1 ognuno ne porta solo h; e similmente vi sono

$$2hn_1 + 2hn_2 = 2h(n_1 + n_2)$$

unità del carattere a; in tutto sono presenti $2h(n_0 + 2n_1 + n_2)$ unità di carattere A od a.

Con questo schema ogni individuo porta $2h$ unità di carattere: se di queste h alla volta sono dello stesso tipo (e quindi o tutte $2h$ di tipo A, oppure a; o h di tipo A ed altre h di tipo a) siamo nel caso di monoibridi con dominanza completa mendeliana, h essendo però fisso.

Ove si presenti il caso di poter avere h' unità A ed h'' unità a, (sempre h' ed h'' fissi) si avrà il caso di monoibridi a carattere con dominanza mendeliana incompleta, che sarà sviluppato in seguito.

Ove si presenti il caso di $h' + h''$ fisso, con h' ed h'' variabili, si avrà la eredità mendeliana polimorfa: e per h molto grande (mentre h' ed h'' variano per unità) la eredità mendeliana analoga a quella intermedia; ed anche tale caso sarà sviluppato in seguito.

Ripetendo il ragionamento fatto or ora per gli accoppiamenti di individui, si troverà precisamente che, nella discendenza K', vi devono essere portatori di carattere (AA) in numero proporzionale ad $(n_0 + n_1)^2$; portatori di carattere (Aa) in numero proporzionale a $2(n_0 + n_1)(n_1 + n_2)$; ed infine portatori di (a, a) in numero proporzionale a $(n_1 + n_2)^2$. Quindi nella generazione K' si avrà la distribuzione

$$(n'_0, 2n'_1, n'_2)$$

che dà una terna proporzionale a

$$(\lambda^2, 2\lambda, 1)$$

con

$$\lambda = \frac{n_0 + n_1}{n_1 + n_2}$$

(come avevamo già trovato) in forma non omogenea: oppure ciò che è lo stesso a

$$(\nu_0^2, 2\nu_0\nu_1, \nu_1^2)$$

in forma omogenea, con $\lambda = \dfrac{\nu_0}{\nu_1}$.

Questo ragionamento probabilistico sarà poi molto utile ove si passi all'eredità intermedia ed all'eredità di poliibridismo mendeliano.

Però da questo ragionamento, segue anche una importantissima conclusione: essa deriva dal fatto che la legge quadratica di discendenza è a sua volta una legge di probabilità: e quindi può avverarsi che gli accoppiamenti avvenuti *non* riproducono proporzionalmente quello possibile.

Quindi, occorre esplicitamente affermare che: *A causa delle leggi di probabilità*

I. *Assegnate collettività originarie aventi la stessa composizione, le loro discendenze — in uno stesso ordine di generazione — possono avere composizioni diverse.*

II. *Tuttavia, la più probabile è quella avente la struttura dedotta dalle leggi mendeliane secondo lo schema statistico dato.*

III. *Più numerosa è la collettività originaria, e maggiore la prolificità, tanto meno frequenti e più piccole sono le deviazioni dalla struttura indicata, e più stabile essa si conserva nelle successive generazioni.*

§ 6. *Collettività con autoselezione e tipi di questa.*

Passiamo al caso di varietà nelle quali vi è autoselezione.

Con tale dicitura intendiamo il seguente fatto. Come vi sono caratteri collegati al sesso, così vi possono essere — (anzi si può dire, vi sono) — caratteri collegati ad una maggiore o minore fecondità, nella loro forma dominante e di conseguenza ad una minore o maggiore fecondità nella forma recessiva.

In modo analogo vi potranno essere caratteri i quali portano ad una varia attrazione di omogamia o a una minore, a seconda della loro forma dominante o recessiva.

A sua volta il primo tipo può manifestarsi in due momenti, pur diversi, dando luogo come conseguenza ultima, allo stesso risultato; e cioè o con la nascita di individui poco fecondi o addirittura sterili (esempio, muli) oppure con la formazione di individui che o non nascono, o muoiono prima di aver raggiunto la maturità sessuale, e quindi non funzionano egualmente da riproduttori come quelli sterili (esempio: fattori letali).

Per questo tipo e per distinguere i due sottocasi ogni generazione andrebbe sdoppiata: considerando cioè dapprima la generazione dei nati e viventi; e da questa staccando poi la categoria dei «riproduttori» che genera la successiva, si dovrebbe cioè segnare:

$$K \; ; \; H \; ; \; K' \; ; \; H' \; ; \; K'' \; ; \; H'' \; ; \ldots ,$$

essendo le K le collettività di viventi generati da una H, che a sua volta —

quale collettività dei riproduttori — è ottenuta come collettività parziale da una H considerando di questa i soli individui riproduttori.

Ma questo tipo permette allora una discriminazione rilevabile direttamente, per osservazione, dei due sotto casi; e pertanto la tralasceremo (almeno per ora).

Passiamo a delineare come può avvenire questa selezione vincolata ad un carattere, e che diremo « *autoselezione* ».

Sia A la forma dominante del carattere, a la forma recessiva.

Vi sono *tre* alternative che corrispondono a tre concetti diversi fra loro.

1.° Può avvenire che A porti seco un « fattore » di fecondità l, ed a un fattore di fecondità m, in modo tale che fra le coppie formatesi, dopo coniugazione, a parità di numero, passano alla generazione successive quantità di coppie proporzionali a

$$l^2 \quad ; \quad lm \quad ; \quad m^2$$

rispettivamente in $\Gamma_0 \equiv (AA)$, $\Gamma_1 \equiv (Aa)$, $\Gamma_2 \equiv (aa)$: in sostanza è una ipotesi probabilistica questa e derivante dalle leggi di probabilità composta.

Essa potrebbe dirsi « *autoselezione cromosica* ».

2.° Può avvenire che la formazione di coppie (AA), (Aa), (aa) nella nuova generazione segua una legge più complessa: cioè le probabilità *non* dipendono da A od a solamente, ma precisamente dalla coppia da formare; ed in tal caso a parità di combinazioni possibili le probabilità sono proporzionali ai numeri

$$p \quad , \quad q \quad , \quad r$$

rispettivamente per i tre tipi di coppie; essa potrebbe dirsi « *autoselezione zigotica* »

3.° Può avvenire infine, come terza alternativa, che l'autoselezione agisca *non* sulle coppie di caratteri da formare, ma sulle coppie di caratteri già presenti nei genitori; ed in tal caso secondo lo schema di probabilità — collegato ad attrazione di omogamia — che l'incrocio

$$\Gamma_i \times \Gamma_j \qquad\qquad (i\,, j = 0\,, 1\,, 2)$$

(maschio femina e femina maschio) avvenga secondo proporzionalità con:

$$l_i \times l_j\,.$$

Questa corrisponde per la coppia generatrice al caso 1.° di quella generata.

4.° Come quarta alternativa, infine, corrispondente alla 2ª, si può

avere che l'incrocio

$$\Gamma_i \times \Gamma_j \qquad (i, j = 0, 1, 2)$$

avvenga secondo proporzionalità con

$$l_{i,j}.$$

Queste ultime due possono dirsi infine di « *autoselezione gametica* ».

I primi due casi si riferiscono quindi al carattere degl' individui generati, gli ultimi due a quelli dei produttori.

In questa nota limiteremo la nostra indagine ai primi due casi.

§ 7. *Autoselezione cromosomica.*

Passiamo all' analisi del primo caso. Lo schema di calcolo è dato dal seguente quadro:

I	Coll. di gen. della coll. origin.:	Γ_0	Γ_1	Γ_2			
II	Numero di elementi di essa	n_0	$2n_1$	n_2			
III	Coll. di gen. della generaz. seg.:	Γ'_0	Γ'_1	Γ'_2			
IV	Numero di elementi di essa	n'_0	$2n'_1$	n'_2			
V	Schema degli incroci	$\Gamma_0 \times \Gamma_0$	$\Gamma_0 \times \Gamma_1$	$\Gamma_0 \times \Gamma_2$	$\Gamma_1 \times \Gamma_1$	$\Gamma_1 \times \Gamma_2$	$\Gamma_2 \times \Gamma_2$;
VI	Num. proporz. agli incr.	n_0^2	$4n_0 n_1$	$2n_0 n_2$	$4n_1^2$	$4n_1 n_2$	n_2^2 ;
VII	Gen. prodotti da ogni incr.	(Γ'_0)	(Γ'_0, Γ'_1)	(Γ'_1)	$(\Gamma'_0, \Gamma'_1, \Gamma'_2)$	(Γ'_1, Γ'_2)	(Γ'_2) ;
VIII	Coeff. rel. di vidisg. mend.	(1)	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	(1)	$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	(1) .

Da questa tabella di calcolo, usando la linea VI e la linea VIII e disgiungendo nelle collettività $\Gamma'_0, \Gamma'_1, \Gamma'_2$ secondo la linea VII, si deducono le possibilità teoriche di prodotti proporzionali a

$$\begin{aligned} n_0^2 + \frac{1}{2} \cdot 4\, n_0 n_1 + \frac{1}{4}\, 4\, n_1^2 = \;& (n_0 + n_1)^2 && , \text{ in } \Gamma'_0 \\ & 2\,(n_0 + n_1)(n_1 + n_2) && , \text{ in } \Gamma'_1 \\ & (n_1 + n_2)^2 && , \text{ in } \Gamma'_2 \,; \end{aligned}$$

e questo in conformità dei §§ precedenti. Se ora applichiamo i coefficienti di riduzione indicati nel primo caso, avremo quale composizione di

K', i numeri

$$\begin{cases} n'_0 = l^2 \quad (n_0 + n_1)^2 \\ n'_1 = lm\,(n_0 + n_1)\,(n_1 + n_2) \\ n'_2 = m^2\,(n_1 + n_2)^2. \end{cases} \tag{G}$$

Salvo il caso che la Γ_1 non contenga elementi, potremo sempre assumere proporzionalmente unitario il numero degli elementi in essa contenuti (se *non* avesse elementi, proporzionalmente gli altri due numeri risulterebbero infiniti). Avremo perciò

$$\begin{cases} \nu'_0 = \dfrac{n'_0}{n'_2} = \dfrac{l^2}{m^2}\left(\dfrac{n_0+n_1}{n_1+n_2}\right)^2 = \left(\dfrac{l}{m}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\nu_0+\nu_1}{\nu_1+1}\right)^2 & ; \quad \nu_0 = \dfrac{n_0}{n_2}, \nu_1 = \dfrac{n_1}{n_2} \\ \nu'_1 = \dfrac{n'_1}{n'_2} = \dfrac{l}{m} \cdot \left(\dfrac{n_0+n_1}{n_1+n_2}\right)^2 = \left(\dfrac{l}{m}\right)\left(\dfrac{\nu_0+\nu_1}{\nu_1+1}\right). \end{cases}$$

Sicchè K e K' sono rappresentate rispettivamente dalle composizioni

$$K \equiv (\nu_0\,, 2\nu_1\,, 1) \quad ; \quad K' \equiv (\nu'_0\,, 2\nu'_1\,, 1)\,;$$

essendo inoltre

$$\nu'_0 = (\nu'_1)^2.$$

Le generazioni successive saranno date dagli schemi di composizione

$$K^{(r)} = (\nu_0^{(r)}\,, 2\nu_1^{(r)}\,, 1) \quad ; \quad \nu_0^{(r)} = (\nu_1^{(r)})^2.$$

Ma, in ogni caso, osserviamo che il passaggio dalle ν' alle ν'', da queste alle ν''';... è sempre retto dalla legge

$$\begin{cases} \nu_0^{(r+1)} = \left(\dfrac{l}{m}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{\nu_0^{(r)}+\nu_1^{(r)}}{\nu_1^{(r)}+1}\right)^2 \\ \nu_1^{(r+1)} = \dfrac{l}{m} \cdot \left(\dfrac{\nu_0^{(r)}+\nu_1^{(r)}}{\nu_1^{(r)}+1}\right) \end{cases}, \quad \nu_0^{(r+1)} = (\nu_1^{(r+1)})^2 \tag{H}$$

e quindi dalla prima generazione in poi basta seguire solo le $\nu_1^{(r)}$.

Ora, nel passaggio da K' a K'' si verifica (ciò che *non* era nella formazione di K')

$$\nu_1'' = \left(\frac{l}{m}\right) \cdot \left(\frac{\nu'_0+\nu'_1}{\nu'_1+1}\right) = \frac{l}{m}\left(\frac{(\nu'_1)^2+\nu'_1}{\nu'_1+1}\right) = \frac{l}{m}\,\nu'_1\,.$$

Pertanto sarà per analogia evidente

$$\nu_1''' = \frac{l}{m}\nu_1'' \quad ; \quad \nu'''' = \frac{l}{m}\nu_1''' ; \ldots$$

Sicchè in definitiva risultano le composizioni successive:

$$\begin{cases} K' \equiv (\rho^2\lambda^2, 2\rho\lambda, 1) & \text{con } \rho = \dfrac{l}{m} \\ K'' \equiv (\rho^4\lambda^2, 2\rho^2\lambda, 1) & \lambda = \nu'_1 = \dfrac{n_0 + n_1}{n_1 + n_2} \\ K''' \equiv (\rho^6\lambda^2, 2\rho^3\lambda, 1) & \\ \ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Se $\rho = 1$, siamo, come calcolo, nel caso trattato per la selezione esterna. Se $\rho > 1$ per ovvie proprietà le generazioni successive evolvono *verso* una costituita dal solo genotipo omozigote dominante; se $\rho < 1$ verso quelle del genotipo omozigote recessivo. In altri termini:

In una collettività mendeliana monoibrida ad autoselezione cromosomica (se al carattere dominante ed al carattere recessivo sono collegati due diversi fattori di fecondità) le generazioni successive — comunque sia stata scelta quella originaria, non pura però — evolvono verso quello dei genotipi avente maggiore fecondità.

Sorge ora il problema; ammessa che sia tale legge, come riconoscerla? come caratterizzare il fattore ρ? come risalire alla composizione originaria?

Al primo problema ed al secondo si risponde osservando che nelle successive generazioni, a partire dalla prima, i fenotipi dominanti stanno al fenotipo recessivo, nei rapporti numerici

$$\frac{\Phi_0}{\Phi_2} = \frac{\Gamma_0 + \Gamma_1}{\Gamma_2} = \rho^2\lambda^2 + 2\rho\lambda \ ; \ \rho^4\lambda^2 + 2\rho^2\lambda \ ; \ \rho^6\lambda^2 + 2\rho^3\lambda ; \ldots$$

se è dunque stata rilevata questa serie di rapporti

$$f' \ , \ f'' \ , \ f''', \ldots$$

sarà

$$f^{(r)} = \rho^{2r}\lambda^2 + 2\rho^r\lambda = (\rho^r\lambda + 1)^2 - 1.$$

Pertanto

$$\sqrt{1 + f^{(r)}} = \rho^r\lambda + 1 ;$$

il chè porta a

$$\rho^r \lambda = \sqrt{1 + f^{(r)}} - 1$$

$$\rho \quad = \frac{\sqrt{1 + f^{(r)}} - 1}{\sqrt{1 + f^{(r-1)}} - 1} \, .$$

Pertanto:

Una collettività mendeliana autoselezionante si riconosce se — statisticamente — nelle sue successive generazioni si verifica che è in media e statisticamente costante la formazione:

$$\frac{\sqrt{1 + f^{(r)}} - 1}{\sqrt{1 + f^{(r-1)}} - 1}$$

dove $f^{(r)}$ *è il rapporto fra numero di individui del genotipo dominante e quello recessivo nella r-sima generazione (esclusa la originaria).*

Se non vi è che una piccola differenza fra ρ e l'unità (se quindi m ed n, fattori di fecondità sono sensibilmente eguali) allora per lunga serie di generazioni $f^{(r)}$ si scosta poco dal rapporto mendeliano tipico 3.

In tal caso, le $f^{(r)}$ sono date da

$$f' = 3 + \varepsilon' \quad ; \quad f'' = 3 + \varepsilon'' ; \ldots$$

le ε essendo positive o negative ma sempre monotone (si intende in media e statisticamente).

In tal caso

$$\sqrt{1 + f} = \sqrt{4 + \varepsilon} = 2\left(1 + \frac{\varepsilon}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \sim 2 + \frac{\varepsilon}{4} \, .$$

Quindi quel rapporto diventa, approssimativamente:

$$1 + \frac{\varepsilon^{(r)} - \varepsilon^{(r-1)}}{4} \, .$$

Ed allora basta rilevare *che le differenze di due di quei rapporti fenotipici restano costanti per affermare l'esistenza del fattore di autoselezione*; esso è eguale all'unità aumentato del quarto di tale differenza.

§ 8. *Autoselezione zigotica.*

Passiamo ora al secondo tipo di fattore autoselezionante. Lo schema di calcolo resta sostanzialmente lo stesso di quello dato nel primo caso. Soltanto i fattorri l^2, lm, m^2, sono sostituiti da p, q, r, sicchè le formule G diventano

$$\left\{\begin{array}{l} n'_0 = p\,(n_0 + n_1)^2 \\ n'_1 = q\,(n_0 + n_1)\,(n_1 + n_2) \\ n'_2 = r\,(n_1 + n_2)^2 \end{array}\right. \qquad (G^*)$$

mentre le *(H)* diventano:

$$\left\{\begin{array}{l} \nu_0^{(r+1)} = \dfrac{p}{r} \cdot \left(\dfrac{\nu_0^{(r)} + \nu_1^{(r)}}{\nu_1^{(r)} + 1}\right)^2 \\ \nu_1^{(r+1)} = \dfrac{q}{r} \quad \left(\dfrac{\nu_0^{(r)} + \nu_1^{(r)}}{\nu_1^{(r)} + 1}\right) \end{array}\right. , \quad \nu_0^{(r+1)} = \frac{pr}{q^2}\,(\nu_1^{(r+1)})^2.$$

Si verifica subito che

$$\nu_1^{(r+1)} = \frac{q}{r} \cdot \left(\frac{\dfrac{pr}{q^2}\,(\nu_1^{(r)})^2 + \nu_1^{(r)}}{\nu_1^{(r)} + 1}\right) = \frac{p}{q} \cdot \nu_1^{(r)} \cdot \left(\frac{\nu_1 + \dfrac{q^2}{pr}}{\nu_1 + 1}\right).$$

Poniamo $\dfrac{q}{r} = \rho$; $\dfrac{q^2}{pr} = \sigma$; allora

$$\nu_1^{(r+1)} = \rho\,\nu_1^{(r)} \cdot \left(\frac{\nu_1 + \sigma}{\nu_1 + 1}\right),$$

e la generazione r-sima ha lo schema di composizione

$$K^{(r)} \equiv \left(\left(\frac{\nu^{(r)} + \sigma}{\nu_1^{(r)} + 1}\right)^2, \quad 2\rho \quad \cdot \left(\frac{\nu_1^{(r)} + \sigma}{\nu_1^{(r)} + 1}\right), \ 1 \right).$$

Anche in tale caso abbiamo una collettività in evoluzione.

Osserviamo che, a partire dalla I generazione, le ν_1 sono date per iterazione sulla curva piana

$$y = \rho\,x\,\frac{x + \sigma}{x + 1} = \rho x \left(1 + \frac{\sigma - 1}{x + 1}\right) \qquad ({}_*{}^*{}_*)$$

essendo $x = \nu_1^{(r)}$, $y = \nu_1^{(r+1)}$.

I casi possibili sono quattro: ρ e σ minori di 1; ρ e $\sigma > 1$; $\rho < 1$ e $\sigma > 1$; $\rho > 1$ e $\sigma < 1$ — essendo entrambi sempre positivi —.

Nel primo caso sarà — per x positivo

$$y = \rho x \cdot \frac{x+\sigma}{x+1} < x \cdot \frac{x+\sigma}{x+1} < x.$$

Nel secondo caso

$$y = \rho x \ \frac{x+\sigma}{x+1} > x \ \frac{x+\sigma}{x+1} > x.$$

In corrispondenza la collettività evolve nel primo caso verso quella costituita dall'omozigote recessivo puro, e nel secondo dall'omozigote dominante puro; il primo caso si verifica per $q < r$, $q^2 < pr$; il secondo caso per $q > r$, $q^2 > pr$.

Senza insistere sulla discussione della curva $({}_{*}{}^{*}{}_{*})$, possiamo dire che negli altri due casi vi sono tre forme stabili staticamente di collettività: due costituite da quelle omozigote pure; la terza avente la composizione

$$\left(\left(\frac{\rho^{\sigma-1}}{1-\rho}\right)^2,\ 2\rho\left(\frac{\rho^{\sigma-1}}{1-\rho}\right),\ 1\right) \qquad \left(\rho \text{ compreso fra } 1 \text{ ed } \frac{1}{\sigma}\right).$$

Nel III caso le generazioni successive evolvono verso l'una e l'altra delle omozigote: e una qualsiasi perturbazione nella III forma di collettività stabile si amplifica spostandola secondo il senso verso una delle altre due; nel IV caso invece (è dinamicamente instabile; e le due omozigote sono dinamicamente stabili) le due omozigote se perturbate evolvono *sempre* (perchè dinamicamente instabili) verso la terza che è dinamicamente e staticamente stabile.

Gli esempi tipici si hanno se $q = 0$ (e quindi o non vi è accoppiamento o vi è infecondità negli eterozigoti) e $p > r$; $p < r$ oppure $p = r = 0$ e $q \neq 0$.

Perciò riassumendo quello che abbiamo detto sul secondo caso, dovremo prevedere:

Se vi sono fattori di selezione non collegati al carattere, ma al genotipo, allora si hanno quattro tipi differenti di varietà mendeliane monoibridi.

Due di essi presentano lo stesso comportamento di selezione legata al carattere, e quindi tendono a ridursi ad una linea pura prefissata: essendo stabili ambo le linee pure, ma una staticamente e dinamicamente, l'altra solo staticamente.

Un'altra invece presenta una terza forma di collettività stabile: ma solo staticamente; le due linee pure lo sono anche dinamicamente. Verso di esse evolve qualsiasi collettività. (Tale è il caso di fattore letale nell'eterozigote).

Infine l'ultima presenta anche la terza forma di collettività stabile; sia dinamicamente che staticamente: le due linee pure sono stabili solo staticamente; se perturbate evolvono verso la terza forma, verso cui in sostanza evolvono tutte le altre.

(Tale è il caso di fattori letali nei due omozigoti).

Notiamo che, in quanto conseguenze sulla composizione delle generazioni, a tale schema si riporta anche quello sulla selezione artificiale da noi svolto nei precedenti numeri; basta porre $p = q = h$; $r = k$ per ritrovare quei risultati.

Un' ultima osservazione è importante fare adesso.

La distribuzione mendeliana pura, di composizione (1 , 2 , 1) *è stabile oltre che in assenza di fattori selezionanti, anche in presenza di tali fattori: ad esempio di fattori che rendano infecondi gli ibridi oppure di fattori letali per ambedue gli omozigoti.*

Nel primo caso si ha che se $p = r = 1$, $q = 0$ (eguale fecondità, infecondità — senza però aversi fattore letale — negli eterozigoti) ogni generazione successiva ad una originaria composta con egual numero di individui conserva sempre invariata la stessa composizione.

Nel secondo caso, invece, se gli omozigoti (e si può dare questo caso?) fossero infecondi, avviene la disgiunzione mendeliana solo nei prodotti degli eterozigoti; e la composizione resta invariata.

Se si confrontano i fenomeni demografici, si scorge chiaramente l'analogia per cui le classi estreme infeconde rispetto a quelle medie, si rinnovano ad ogni generazione con l'apporto a queste dovute; mentre queste danno il filone centrale e la gran massa della continuità della razza.

§ 9. *Conclusioni.*

Dall'analisi che precede possiamo dare le seguenti affermazioni — *valevoli statisticamente ed in media:*

I. *È possibile costituire, servendosi di due ceppi omozigoti — l'uno dominante e l'altro recessivo — (opportunamente incrociandoli, e poi opportunamente riducendone il prodotto) costituire una collettività di monoibridi, originaria,* K, *di composizione*

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Gamma_0 \equiv (AA) & , \ \Gamma_1 \equiv (Aa) & , \ \Gamma_2 \equiv (aa) \\ n_0 & , \ 2n_1 & , \ n_2 \end{array} \right\} .$$

II. *A partire da questa con incroci mutui, statisticamente proporzionali a quelli possibili, si può seguire l'evoluzione di questa collettività nelle singole generazioni successive:* $K', K'', K''', \ldots$

III. *Se il carattere* NON *è legato a fattori di fecondità o di letalità, a partire dalla prima generazione la composizione è fissa; e quindi la*

collettività (nella sua evoluzione nel tempo) è staticamente stabile, cioè permanente. La sua composizione è data dai 3 termini dello sviluppo del quadrato di un binomio: $(1+\mu)^2$ *cioè* $\mu^2, 2\mu, 1$.

IV. *Dinamicamente in questo caso, la stabilità è indifferente: cioè mutata in una certa generazione la struttura, essa prende nelle successive nuovo assetto stabile.*

V. *Se agisce un fattore autoselezionante di fecondità cromosico (legato cioè alla presenza di uno o due fattori dominanti o recessivi) la collettività evolve verso le linee pure: queste sono ora le sole collettività staticamente stabili. Ma non ambedue lo sono anche dinamicamente; perturbato l' andamento (per aggiunta di eterozigoti) la collettività evolve — ed è naturale — verso quella a fecondità maggiore.*

VI. *Se agisce egualmente in tutte le generazioni un fattore selezionante esterno sul fenotipo, si verifica lo stesso comportamento, a seconda che è più forte la riduzione nell' uno o nell' altro fenotipo.*

VII. *Se agisce un fattore autoselezionante zigotico (di infecondità totale o parziale; di letalità totale o parziale non più collegato al carattere, ma al genotipo), la collettività evolve ancora: ma a seconda dei fattori di selezione può continuare ad evolvere nelle forme ora dette, oppure si può aggiungere un terzo tipo di collettività ad assetto stabile. Questa può essere poi dinamicamente instabile, ed allora ogni perturbazione la riconduce verso una linea pura (l' una o l' altra a seconda della generazione originaria) Oppure può essere dinamicamente stabile, ed allora qualsiasi altra collettività che non sia una linea pura evolve verso di essa: la linea pura se perturbata da introduzione di elementi eterozigoti o dell' altra linea, evolve a sua volta verso quell' assetto stabile.*

La discussione di quest' ultimo risultato che è il più comprensivo di tutti, si effettua attraverso la discussione della cubica piana

$$y = \rho x \frac{x+\sigma}{x+1}$$

e l'iterazione su di essa; cioè se si pone $x = \nu^{(r)}$, sarà $y = \nu^{(r+1)}$; a sua volta se questo è assunto come nuova ascissa, l'ordinata corrispondente da $\nu^{(r+2)}$; e così via.

Infine lo schema tipico mendeliano, appare come staticamente e dinamicamente stabile in un gran numero di casi: di quelli ad esempio nei quali gli omozigoti si comportano egualmente fra loro.

Per concludere con la rappresentazione geometrica, osserviamo che ogni collettività di composizione $(\nu_0, 2\nu_1, 1)$ può essere rappresentata da un punto del piano di coordinate $\xi = \nu_0; \xi_1 = \nu_1$.

Ogni legge di selezione, a partire dalla prima generazione, dà esclusi-

vamente punti che sono sulle parabole

$$\xi = t^2 \ , \ \eta = 2\rho t \ ;$$

quindi ogni parabola dà una legge di selezione diversa.

Inoltre, su queste parabole, le generazioni successive sono ottenute con l'iterazione sulla corrispondente cubica

$$y = \rho x \cdot \frac{x + \sigma}{x + 1}$$

ottenuta partendo dal valore iniziale $x' = \frac{n_0 + n_1}{n_1 + n_2}$, ed iterando. In particolare queste cubiche, per $\sigma = 1$ o per $\rho = 0$ si riducono a rette.

Circa queste cubiche, osserviamo che esse passano tutte per l'origine; e che il comportamento delle collettività in evoluzione è caratterizzato dalla tangente nell'origine, dalla direzione del punto all'infinito, dalla loro posizione rispetto alla bisettrice degli assi e dal punto d'incontro della cubica con la I bisettrice, x cade nel I quadrante. I casi effettivi, essendo le ν positive, sono dati dal solo primo quadrante. Sono collettività stabili — staticamente — l'origine (omozigote recessivo), il punto all'infinito (omozigote dominante) e l'eventuale anzidetto punto d'incontro con la I bisettrice.

Se tale punto manca, e se:
la tangente nell'origine è al disotto della bisettrice, la sola collettività stabile è quella omozigote recessiva (origine); se è al disopra lo è quella omozigote dominante.

Se invece quel punto esiste, e se:
la tangente nell'origine è al disotto, quel punto d'incontro rappresenta una collettivita staticamente stabile ma dinamicamente no (lo sono invece quelle omozigote e tutte le collettività che evolvono verso l'una o l'altra di queste); mentre se la tangente è al disopra, quel punto d'incontro è la sola collettività dinamicamente stabile (non lo sono le omozigote) ed ogni altra evolve verso di essa.

Inviluppi di curve piane ed equazioni di Clairaut generalizzate

Nota della dott. **Maria Di Bello**, *presentata dal socio corr.* **G. Andreoli**

(Adunanza del dì 2 marzo 1940 - XVIII).

Sunto. — Nell' estendere il metolo di formazione dell' inviluppo al caso che la famiglia semplicemente infinita di curve piane sia fissata da un' equazione contenente due parametri vincolati da una relazione, si arriva ad una certa equazione differenziale.

In particolare, se si hanno rette, si trova una ulteriore generalizzazione delle equazioni di Clairaut, e questa a sua volta si estende collegandosi a quella data in una precedente nota.

1. Consideriamo la famiglia doppiamente infinita di curve piane rappresentata dall' equazione

$$f(x, y, a, b) = 0 \tag{1}$$

per i valori dei parametri variabili in un certo campo. Questi parametri vengano ora ulteriormente legati dalla relazione

$$\varphi(a, b) = 0; \tag{2}$$

sicchè da quella famiglia di ∞^2 curve ne stacchiamo una semplice infinità: questa ammetterà, in generale, un inviluppo. Vogliamo trovarlo usando la (1) e la (2) direttamente, e quindi senza farne la effettiva riduzione ad una famiglia con *un* solo parametro.

Deriviamo totalmente la (1) rispetto ad x lungo una curva del sistema,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0. \tag{3}$$

Se supponiamo già noto l' inviluppo, ricavato dal sistema (1), (2), in ogni suo punto ξ, η, esso toccherà una certa curva del sistema; sicchè a e b risultano funzioni del parametro t distributore lungo l' inviluppo, assieme a ξ, η. Sia, per esempio, x tale parametro.

Differenziamo lungo l' inviluppo le curve del sistema, otterremo

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial a} a' + \frac{\partial f}{\partial b} b' = 0. \tag{4}$$

Questa relazione (4) per la (3) si riduce a

$$\frac{\partial f}{\partial a} da + \frac{\partial f}{\partial b} db = 0;$$

se differenziamo ora totalmente la (2) troviamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} da + \frac{\partial \varphi}{\partial b} db = 0;$$

sicchè è soddisfatto il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial a} da + \dfrac{\partial f}{\partial b} db = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} da + \dfrac{\partial \varphi}{\partial b} db = 0. \end{cases}$$

Di qui segue che, perchè questo sistema ammetta soluzioni, il determinante dei coefficienti, cioè lo Jacobiano, deve essere identicamente nullo

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a} & \dfrac{\partial f}{\partial b} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial b} \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial (f, \varphi)}{\partial (a, b)} = 0$$ [1].

Fra le tre equazioni del sistema seguente

$$\begin{cases} f(x, y, a, b) = 0 \\ \varphi(a, b) = 0 \\ \dfrac{\partial (f, \varphi)}{\partial (a, b)} = 0 \end{cases}$$

potremo eliminare le costanti a e b, ottenendo così l'equazione che dà l'inviluppo.

In generale se abbiamo $n + 1$ parametri legati tra loro da n relazioni, l'inviluppo si troverà elimidando gli $n + 1$ parametri tra l'equazione data, l'equazione dei vincoli e l'Jacobiano delle equazioni rispetto ai parametri.

---

[1]) Cf. *Leçons sur les théories générales de l' Analyse par* BAIRE. Paris, Gauthier-Villars, tome I pag. 172, n. 377.

Cioè, se è data l'equazione

$$f(x, y, \dots a_i \dots) = 0 \qquad (i = 1, \dots n)$$

e le equazioni dei vincoli

$$\varphi_r(\dots a_i \dots) = 0 \qquad (r = 1, \dots n - 1)$$

l'equazione dell'inviluppo si otterrà eliminando le a_i tra le equazioni del sistema

$$\left\{\begin{array}{ll} f(x, y \dots a_i \dots) = 0 & \\ \varphi_r(\dots a_i \dots) = 0 & (r = 1, \dots n - 1) \\ \dfrac{\partial(f, \varphi_1, \dots \varphi_{n-1})}{\partial(a_1, \dots a_n)} = 0. & \end{array}\right.$$

2. Cerchiamo ora l'equazione differenziale della famiglia di ∞^1 curve definite dal sistema (1), (2). Avremo

$$\left\{\begin{array}{l} F = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' = 0 \\ f(x, y, a, b) = 0 \\ \varphi(a, b) = 0. \end{array}\right.$$

Eliminando a e b si ha l'equazione differenziale cercata. Osserviamo che non può sparire y' in tale eliminazione perchè, se così fosse, dovrebbe risultare identicamente

$$\frac{\partial(f, \varphi, F)}{\partial(a, b, y')} = 0.$$

Ora questo si riduce a

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a} & \dfrac{\partial f}{\partial b} & 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial b} & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial a} & \dfrac{\partial F}{\partial b} & \dfrac{\partial F}{\partial y'} \end{vmatrix} = 0$$

perchè nè f nè φ contengono y'. Ma

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

quindi

$$J = \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(a, b)} \cdot \frac{\partial f}{\partial y};$$

ma $\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(a, b)}$ *non* è identicamente nullo; $\frac{\partial f}{\partial y}$ non può essere nemmeno nullo altrimenti mancherebbe in f la y, quindi $J \neq 0$.

3. In particolare sia

$$f \equiv y - ax - b = 0$$

la famiglia doppiamente infinita delle rette, sia $\varphi(a, b) = 0$ il vincolo intercedente tra i parametri. Troviamo l'equazione differenziale di I ordine corrispondente al sistema

$$\begin{cases} f = y - ax - b = 0 \\ \varphi(a, b) = 0. \end{cases}$$

Deriviamo totalmente la prima equazione

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -a \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \qquad \text{quindi}$$

$$-a + y' = 0 \qquad \text{cioè} \qquad a = y'$$

ma dalla prima equazione si ha

$$b = y - ax = y - xy',$$

quindi sostituendo questi valori nella $\varphi(a, b) = 0$ otteniamo

$$(C) \qquad \varphi(y', y - xy') = 0$$

che è proprio l'equazione generalizzata di CLAIRAUT *cui volevamo pervenire.*

Troviamo ora l'inviluppo. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} f = y - ax - b = 0 \\ \varphi(a, b) = 0 \\ \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(a, b)} = 0. \end{cases}$$

Ora

$$\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(a, b)} = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} & \frac{\partial \varphi}{\partial b} \end{vmatrix} = 0$$

cioè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} - x \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0$$

quindi il sistema puo scriversi

$$\left\{ \begin{array}{l} f = y - ax - b = 0 \\ \varphi(a, b) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial a} - x \dfrac{\partial \varphi}{\partial b} = 0 \end{array} \right.$$

sistema che dà l'inviluppo.

Si può ora dimostrare che, essendo

$$y = ax + b$$

l'integrale generale dell'equazione differenziale di CLAIRAUT, l'integrale singolare è l'inviluppo di tali rette, la curva cioè a cui esse sono tangenti.

La (C) si integra per derivazione; infatti deriviamo totalmente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} y'' + \frac{\partial \varphi}{\partial (y - xy')} (y - xy')' = 0$$

cioè

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y'} y'' - \frac{\partial \varphi}{\partial (y - xy')} y'' x = 0$$

$$y'' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y'} - \frac{\partial \varphi}{\partial (y - xy')} x \right) = 0.$$

Da questa equazione si ottiene o

$$y'' = 0$$

cioè

$$y' = a = \text{costante}$$

cioè ancora

$$y = ax + b$$

che è proprio l'integrale generale, oppure, essendo $y' = a$, $y - xy' = b$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} - x \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0$$

che è l'integrale singolare dell'equazione differenziale di CLAIRAUT, cioè l'inviluppo.

4. Invece di considerare la famiglia di rette, consideriamo il sistema più generale di curve.

$$f(x, y) - ax - b = 0.$$

Questo tipo generalizza l' altro assegnato nella nostra nota [1]); infatti per $f(x, y) = x^2 + y^2$ si trovano quei cerchi, mentre per $f(x, y) = y$ si ritrova l' equazione (C).

Sia

$$F = f(x, y) - ax - b = 0$$

l' equazione di una famiglia di curve; $\varphi(a, b) = 0$ al solito il vincolo esistente fra i due parametri, vogliamo l' inviluppo di tali curve.

Deriviamo totalmente la $F = 0$, avremo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' - a = 0.$$

Eliminiamo a e b fra le equazioni del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} F = f(x, y) - ax - b = 0 \\ \varphi(a, b) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} y' - a = 0 ; \end{array} \right.$$

dall' ultima equazione si trae

$$a = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$

mentre dalla prima si ha:

$$b = f(x, y) - ax = f(x, y) - x \frac{\partial f}{\partial x} - x y' \frac{\partial f}{\partial y} .$$

L' equazione differenziale generalizzante quella di CLAIRAUT, *quella della precedente nota e l' ultima C è*

$$(C^*) \qquad \varphi\left[\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' \quad , \quad f - x\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right)\right] = 0.$$

---

[1]) DI BELLO M., « *Un' equazione analoga a quella di* CLAIRAUT *ecc.* » (questi Rendic., a. c.).

Anche questa si integra per derivazione. Infatti indichiamo con φ'_1 la derivata rispetto al primo argomento, con φ'_2 quella rispetto al secondo.

Deriviamo totalmente la (C^*), otterremo:

$$(5) \qquad \varphi'_1 \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'\right) + \varphi'_2 \frac{d}{dx}\left(f(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial x} - xy'\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0.$$

Ora

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + y'\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{2\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''$$

$$\frac{d}{dx}\left(f(x,y) - x\frac{\partial f}{\partial x} - xy'\frac{\partial f}{\partial y}\right) =$$

$$= -\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy'\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + xy'^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + xy''\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Quindi la (5) diventa

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''\right)\varphi'_1 -$$

$$- x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''\right)\varphi'_2 = 0.$$

L' equazione si spezza in

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y'' = 0$$

e

$$\varphi'_1 - x\,\varphi'_2 = 0.$$

La prima corrisponde precisamente a

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$$

che porta a

$$\frac{df}{dx} = 0$$

cioè

$$f(x,y) = a\,x + b$$

che è l' integrale generale, mentre l' altra

$$\varphi'_1 - x\,\varphi'_2 = 0$$

riporta all' integrale singolare che è l' inviluppo.

Le variazioni di latitudine osservate nel 1939 dalle Stazioni Internazionali.

Nota del socio **Luigi Carnera** *e del dr. ing.* **Paolo Vocca**

(Adunanza del dì 4 maggio 1940 - XVIII)

Sunto. — Si espongono i risultati ricavati dalle osservazioni fatte nelle otto Stazioni internazionali di latitudine durante il corso del 1939, e si deduce la traiettoria percorsa dal Polo di rotazione della Terra.

Possiamo per la quarta volta comunicare oggi in questa nota i risultati ricavati dall' Ufficio Centrale delle Latitudini dalle osservazioni eseguite nelle otto Stazioni internazionali; si riferiscono a quelle del 1939, e costituiscono la continuazione dei lavori presentati negli anni precedenti.

Le otto stazioni sono rimaste inalterate nel loro complesso, ed hanno collaborato con l' abituale solerzia, non ostacolate in generale dal tempo, che si mantenne abbastanza buono, e pressochè normale come si può dedurre dal numero delle osservazioni, che coincide su per giù con la media del quadriennio 1936-9. Per la sola *stazione* di Carloforte si deve deplorare una non giustificata perdita totale di ben tre mesi di osservazioni (aprile, maggio, giugno), che ha posto in una certa difficoltà l' Ufficio centrale, avendo le osservazioni di quella stazione una importanza capitale per la deduzione della coordinata x del Polo. Se il maltempo ha contribuito a rendere scarse le osservazioni del mese di aprile, ed inconvenienti riscontrati nel nuovo micrometro del Telescopio Zenitale di Carloforte, potrebbero giustificare in parte la poca attività di quella stazione, altre ragioni hanno provocato la necessità di abbandonare completamente gli scarsi risultati di osservazione di quei tre mesi. Le osservazioni delle altre stazioni furono in generale buone ed accurate; ma ancora una volta dobbiamo rilevare come vi siano alcuni osservatori, che pongono poca cura nell' accurata rettifica strumentale: le livelle non sono parallele, talchè nel passare dall'osservazione di una stella alla seguente della stessa coppia appaiono spesso differenze sensibili, che sono prova evidente di una poco accurata rettifica della verticalità dell' asse di rotazione. E sarebbe pur desiderabile fosse posta una maggior cura nel fare le letture micrometriche, dovendo noi spesso correggere con una certa arbitrarietà i valori degli interi delle rotazioni, e talvolta persino dei decimi. Non sarà mai abbastanza raccomandata la lettura e l' osservanza delle norme dettate nel libretto del

prof. ALBRECHT, espressamente compilato come guida per le stazioni internazionali di latitudine.

Riterremmo però di mancare ugualmente, se non ringraziassimo in modo del tutto particolare il personale delle Stazioni di Batavia, Mizusawa, La Plata ed Ukiah, che con la loro diligenza e precisione ci hanno procurato le osservazioni migliori.

Durante il corso del 1939 non si sono verificati cambiamenti di personale nelle Stazioni di Mizasawa, Gaitersburg, Ukiah e La Plata; a Kitab invece si sono aggiunti all'osservatore SCHTSCHIRGEZKIJ i Signori LANGE e OBRASZOV; a Carloforte il dott. RIGHINI, richiamato improvvisamente a fine agosto sotto le armi, venne in sulle prime sostituito dal dott. NICOLINI, e più tardi definitivamente dal dott. COLACEVICH; ad Adelaide iniziò nel marzo la collaborazione il sig. C. K. GRANT; ed infine a Batavia mentre osservarono sino a fine gennaio i signori Ing. POLDERWAART ed WEINKOPF, quest'ultimo seguitò le osservazioni in unione al signor KALKMAR nel febbraio, e nei rimanenti mesi osservarono i signori KALKMAR, SHARPFF e GSÖLLPOINTER.

Per il calcolo delle latitudini si fece uso delle Effemeridi precedentemente calcolate dall'Ufficio centrale, assumendo quali posizioni medie quelle già precedentemente usate, e tratte, come è noto, per il parallelo Nord dal N. G. C. di Boss, per quello australe dal Catalogo derivato dalle accurate e precise osservazioni meridiane di La Plata, e per Batavia da quelle usate dal prof. KIMURA negli anni precedenti. Nel calcolo delle posizioni apparenti si usarono le costanti del Berliner Astr. Jahrbuch, tenendo sempre conto anche dei termini a corto periodo della nutazione.

Quali costanti strumentali si adottarono ancora quelle degli anni precedenti: solamente essendo stato nel maggio ripreso l'uso a Carloforte del vecchio grande zenitale, dopo radicale riparazione e cambio di micrometro e di livelle, si adottarono per questo strumento i seguenti valori:

$$R = 39''.6112 \qquad L_1 = 0^R.02601 \qquad L_2 = 0^R.03150.$$

Il numero delle coppie osservate nel corso dell'anno è stato, nelle singole stazioni, il seguente (sono dati in parentesi i valori medii del precedente triennio):

	Gruppo serale	Gruppo mattino	Totale
Mizusava	779 (644)	685 (569)	1464 (1213)
Kitab	701 (719)	624 (696)	1325 (1415)
Carloforte	481 (981)	391 (805)	872 (1786)
Gaithersburg	709 (668)	598 (559)	1307 (1227)
Ukiah	740 (715)	728 (685)	1468 (1400)
	3410 (3727)	3026 (3314)	6436 (7041)
Adelaide	786 (678)	715 (600)	1501 (1278)
La Plata	651 (943)	474 (769)	1125 (1712)
	1437 (1621)	1189 (1369)	2626 (2990)
Batavia	921 (922)	1041 (1000)	1962 (1922)
Totale	5768 (6270)	5256 (5683)	11024 (11953)

I due quadri che seguono, contengono per le singole stazioni le latitudini medie ricavate da ciascun gruppo, le corrispondenti epoche medie, ed il numero delle coppie considerate per dedurre ciascuno di quei valori medi.

Quadro I.

STAZIONI BOREALI

Gruppi serali

1939.	Gruppo	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersburg		Ukiah	
.06	IV	3″.638	57	1″.711	12	8″.885	22	13″.408	24	12″.230	50
.14	V	.472	54	.659	53	.696	44	.102	47	.076	41
.22	VI	.574	85	.739	65	.852	22	.364	68	.342	52
.31	VII	.421	108	.615	50	—	—	.280	65	.261	60
.39	VIII	.307	62	.621	73	—	—	.223	83	.153	60
.47	IX	.397	55	.404	78	—	—	.224	51	.021	72
.56	X	.444	69	.622	62	8 .907	109	.298	66	.161	83
.64	XI	.334	46	.725	84	9 .145	69	.428	42	.179	78
.73	XII	.377	49	.838	57	9 .178	38	.434	63	.161	71
.80	I	.475	64	.760	68	9 .316	70	.482	82	.141	78
.89	II	.284	65	.667	46	8 .952	70	.167	68	11 .977	72
.97	III	.638	65	.866	53	9 .182	37	.395	50	12 .152	23

Gruppi del mattino

1939.	Gruppo	Mizusawa		Kitab		Carloforte		Gaithersburg		Ukiah	
.06	V	3″.485	52	1″.766	12	8″.740	9	13″.054	12	12″.034	46
.14	VI	.657	56	.901	47	.870	29	.349	41	.328	42
.22	VII	.507	81	.669	62	.844	26	.352	62	.332	47
.31	VIII	.388	83	.658	45	—	—	.307	59	.210	60
.40	IX	.194	46	.283	73	—	—	.275	62	.041	60
.47	X	.532	43	.554	71	—	—	.305	28	.140	72
.56	XI	.608	56	.670	55	9 .037	102	.461	56	.252	86
.64	XII	.382	43	.723	73	9 .202	57	.485	44	.190	78
.73	I	.502	50	.737	54	9 .267	31	.506	48	.143	72
.80	II	.339	59	.722	46	8 .979	62	.216	75	11 .942	77
.89	III	.533	67	.814	34	9 .343	53	.453	64	12 .215	71
.97	IV	.550	49	.844	52	9 .111	22	.335	47	.120	19

Quadro II.

STAZIONI AUSTRALI

Gruppi serali

1940	Gruppo	Adelaide		La Plata		Batavia	
.06	IV	— 36″.539	104	— 31″.870	57	— 38″.103	49
.14	V	.682	76	.967	69	.324	73
.22	VI	.626	80	.884	71	.458	85
.30	VII	37 .124	60	32 .240	90	.599	62
.39	VIII	36 .997	69	31 .920	41	.815	86
.47	IX	.988	75	.810	47	.750	82
.55	X	.943	66	.606	40	.250	78
.64	XI	.760	27	.495	34	.444	57
.73	XII	.953	88	.773	33	.754	91
.81	I	.735	69	.463	54	.252	101
.88	II	.473	35	.579	44	.262	91
.97	III	.673	37	.924	61	.593	66

Gruppi del mattino

1940	Gruppo	Adelaide		La Plata		Batavia	
.06	V	— 36″.640	100	— 31″.994	51	— 38″.380	45
.14	VI	.616	78	.928	46	.333	72
.22	VII	37 .005	99	32 .249	61	.615	95
.30	VIII	36 .930	59	31 .990	66	.757	86
.37	IX	.926	47	.877	29	.649	94
.47	X	.846	64	.721	30	.219	111
.55	XI	.724	45	.442	23	.525	73
.64	XII	.975	32	.734	21	.754	77
.73	I	.729	75	.569	25	.364	107
.81	II	.522	59	.252	35	.289	104
.88	III	.756	32	.888	48	.636	101
.97	IV	.575	25	.932	39	.210	75

Per non introdurre discontinuità e rendere paragonabili fra di loro i risultati ottenuti negli anni decorsi con questi del 1939, si è proceduto ancora deducendo in modo distinto due polodie: una basata esclusivamente sulle stazioni boreali, ed una seconda tenendo conto contemporaneamente dei risultati delle cinque stazioni boreali e delle due australi di Adelaide e La Plata, e ciò in attesa di una nuova elaborazione di tutto il materiale raccolto fino ad ora, che già si trova a buon punto, e che acconsentirà una deduzione più sicura ed omogenea, perchè basata su valori rettificati tanto del passo del micrometro, quanto su più corrispondenti valori della latitudine media delle singole stazioni, in corrispondenza degli attuali valori delle declinazioni.

Partendo dalle latitudini medie φ_0 delle stazioni, adottate negli anni precedenti, con le risultanti variazioni della latitudine di ciascuna stazione, e per ciascun gruppo $(\varphi_{oss} - \varphi_0)$, si ricavarono separatamente dalle osservazioni dei gruppi serali e del mattino in prima approssimazione i valori delle coordinate istantanee X ed Y del Polo, ed i valori dei terzi termini Z, costituiti essenzialmente dalle correzioni da apportare alle declinazioni medie del gruppo, e da quella parte della variazione della latitudine (z) che è indipendente dallo spostamento del Polo. Riunendo in media aritmetica i due valori di Z, ottenuti in due mesi successivi osservando le stesse stelle, si può considerare quel valore come valore approssimato della correzione $\Delta\delta$ delle declinazioni del corrispondente gruppo. Poichè tali valori risultano in ottimo accordo con le correzioni trovate nei decorsi anni, come ben si vede dai quadri che seguono, abbiamo riuniti i risultati del 1939 con quelli precedenti, ed assunto le medie del quadriennio quali correzioni delle declinazioni dei gruppi, e corrette poscia le latitudini osservate mediante quei valori.

QUADRO III

Correzioni alle declinazioni medie di ciascun gruppo.
Dalle sole stazioni boreali.

Gruppo	1936	1937	1938	1939	Media	
IV	—".072	—".076	—".058	—".044	—".061	Declinazioni gruppi boreali.
V	+ .096	+ .103	+ .077	+ .105	+ .095	
VI	— .090	— .037	— .084	— .080	— .073	
VII	— .032	+ .020	+ .005	+ .008	.000	
VIII	+ .051	+ .090	+ .075	+ .055	+ .068	
IX	+ .183	+ .204	+ .227	+ .203	+ .204	
X	+ .093	+ .107	+ .120	+ .047	+ .092	
XI	— .057	— .029	— .052	— .051	— .047	
XII	— .079	— .072	— .090	— .059	— .075	
I	— .127	— .085	— .078	— .096	— .096	
II	+ .101	+ .120	+ .095	+ .106	+ .105	
III	— .124	— .125	— .117	— .129	— .131	

Dal complesso delle stazioni boreali ed australi.

Gruppo	1936	1937	1938	1939	Media	
IV	—".101	—".093	—".045	—".045	—".067	Declinazioni gruppi boreali.
V	+ .088	+ .102	+ .070	+ .106	+ .091	
VI	— .081	— .042	— .088	— .083	— .073	
VII	— .015	+ .015	.000	+ .009	+ .002	
VIII	+ .076	+ .086	+ .070	+ .061	+ .073	
IX	+ .202	+ .211	+ .222	+ .204	+ .210	
X	+ .209	+ .105	+ .114	+ .043	+ .118	
XI	— .050	— .042	— .058	— .049	— .050	
XII	— .086	— .083	— .097	— .064	— .082	
I	— .129	— .093	— 081	— .100	— .101	
II	+ 079	+ .116	+ .095	+ .105	+ .099	
III	— .163	— .121	— .119	— .134	— .134	
IV	— .081	— .059	— .124	— .060	— .081	Declinazioni gruppi australi
V	+ .016	+ .016	— .005	+ .027	+ .013	
VI	+ .005	+ .008	+ .004	+ .027	+ .013	
VII	+ .378	+ .412	+ .375	+ .377	+ .385	
VIII	+ .155	+ .195	+ .157	+ .170	+ .169	
IX	+ .109	+ .179	+ .088	+ .125	+ .125	
X	— .031	— .011	— .048	— .010	— .025	
XI	— .126	— .154	— .186	— .198	— .166	
XII	+ .069	+ .057	+ .037	+ .050	+ .053	
I	— .070	— .156	— .127	— .188	— .135	
II	— .277	— .365	— .327	— .355	— .331	
III	+ .050	+ .016	+ .037	+ .001	+ .026	

Con i nuovi valori delle $\varphi_{oss.}$ ricavati tenendo conto di queste correzioni, e con le differenze nuove $(\varphi_{oss.} - \varphi_0)$ si è rifatta la determinazione delle coordinate X ed Y del Polo e del termine Z residuo che troviamo nei quadri IV e V, essendo in essi distinti i valori ricavati dalle osservazioni serali da quelli analoghi dedotti dalle osservazioni dei gruppi del mattino.

STAZIONI BOREALI

EPOCA 1939	Gruppi	X sera	X matt.	X media	Y sera	Y matt.	Y media	Z_b sera	Z_b matt.	Z_b media	Z_b S—M
.06	IV-V	—".101	—".086	—".094	+".062	—".082	—".010	+".007	+".001	+".003	+".006
.14	V-VI	— .118	— .125	— .122	— .017	+ .003	— .007	+ .019	— .033	— .007	+ .052
.22	VI-VII	— .120	— .101	— .111	+ .085	+ .118	+ .102	+ .019	— .018	+ .001	+ .037
.31	VII-VIII	— .052	+ .023	— .015	+ .115	+ .104	+ .110	+ .034	+ .092	+ .063	— .058
.39	VIII-IX	+ .038	— .019	+ .010	+ .096	+ .222	+ .159	+ .018	+ .027	+ .023	— 009
.47	IX-X	— .093	— .101	— .097	+ .110	+ .083	+ 097	— .030	— .039	— .035	+ .009
.56	X-XI	— .013	— .024	— .019	+ .087	+ .104	+ .096	— .051	— .031	— .041	— .020
.64	XI-XII	+ .165	+ .175	+ .170	+ .128	+ .137	+ .133	+ .023	+ .019	+ .021	+ .004
.73	XII-I	+ .181	+ .167	+ .174	+ .078	+ .094	+ .086	+ .014	+ .003	+ .009	+ .011
.80	I-II	+ .186	+ .123	+ .155	+ .084	— .003	+ .041	.000	— .016	— .008	+ .016
.89	II-III	+ .114	+ .172	+ .143	+ .022	+ .061	+ .042	+ .015	— .005	+ .005	+ .020
.97	III-IV	+ .069	+ .075	+ .072	— .016	— .012	— .014	+ .010	— .005	+ .005	+ .015

STAZIONI BOREALI ed AUSTRALI

EPOCA 1939	Gruppi	X sera	X matt.	X media	Y sera	Y matt.	Y media	Z_b sera	Z_b matt.	Z_b media	Z_b S—M	Z_s sera	Z_s matt.	Z_s media	Z_s S—M
.06	IV-V	— .148	— .101	— .125	+ .023	— .094	— .036	+ .008	+ .006	+ .007	+ .002	+".003	+".005	+".004	—".002
.14	V-VI	— .130	— .147	— .139	— .028	— .015	— .022	+ .028	— .033	— .003	+ .061	+ .022	— .010	+ .006	+ .032
.22	VI-VII	— .154	— .147	— .151	+ .055	+ .079	+ .067	+ .015	— .027	— .006	+ .042	— .020	— .036	— .028	+ .016
.31	VII-VIII	— .106	— .038	— .072	+ .093	+ .079	+ .086	+ .040	— .040	.000	+ .080	+ .017	+ .002	+ .010	+ .015
.39	VIII-IX	+ .015	— .084	— .035	+ .086	+ .196	+ .141	+ .016	+ .032	+ .024	— .016	— .005	+ .015	+ .005	— .020
.47	IX-X	— .042	— .052	— .047	+ .131	+ .104	+ .118	— .044	— .073	— .059	+ .029	— .009	+ .025	+ .008	— .034
.56	X-XI	+ .036	+ .012	+ .024	+ .127	+ .135	+ .131	— .077	— .029	— .053	— .048	+ .007	— .040	— .017	+ .047
.64	XI-XII	+ .147	+ .147	+ .147	+ .112	+ .114	+ .113	+ .021	+ .020	+ .021	+ .001	— .013	— .004	— .009	— .009
.73	XII-I	+ .157	+ .138	+ .148	+ .058	+ .070	+ .064	+ .018	+ .002	+ .010	+ .016	— .002	— .025	— .014	+ .023
.80	I-II	+ .188	+ .152	+ .170	+ .074	+ .022	+ .048	.000	— .007	— .004	+ .007	— .080	— .097	— .089	+ .017
.89	II-III	+ .068	+ .098	+ .083	— .016	— .001	— .009	+ .018	— .010	+ .004	+ .028	+ .049	— .015	+ .017	+ .064
.97	III-IV	+ .019	+ .002	+ .011	— .059	— .073	— .066	+ .010	— .005	+ .003	+ .015	— .035	+ .028	— .004	— .063

Riportati allora su di un grafico i valori delle due coordinate, servendosi, per il raccordo, dei valori trovati per il dicembre dello scorso anno 1938, venne disegnato con curva continua il loro andamento nel corso dell'anno, traendone tanto per gli istanti delle osservazioni, che per epoche procedenti di decimo in decimo di anno, i valori che consideriamo per ora definitivi per le dette coordinate e sono riportati nel quadro VI. Si deve a questo punto osservare, che se è stato facile tracciare senza timore di arbitrarietà le curve delle X e delle Y con i valori tratti dal complesso delle stazioni australi e boreali, non egualmente sicuro si è presentata quella delle X, per il caso delle sole stazioni boreali in corrispondenza dei mesi in cui vennero a mancare le osservazioni di Carloforte, cosa facilmente comprensibile se si tien conto del peso che hanno tali ossorvazioni quando si tratta di questa coordinata (peso: 0.978, mentre gli analoghi delle altre stazioni vanno da 0.049 per Gaithersburg, a 0.607 per Mizusawa).

Quadro VI

Coordinate del Polo durante l'anno 1940.

Dalle stazioni boreali.

	X	Y		X	Y
1938.97	—″.112	—″.034			
1939.06	— .126	— .019	1938.9	—″.103	—″.036
.14	— .124	+ .014	39.0	— .120	— .031
.22	— .112	+ .081	.1	— .126	— .006
.31	— .085	+ .126	.2	— .116	+ .063
.39	— .057	+ .137	.3	— .088	+ .123
.47	— .022	+ .131	.4	— .053	+ .137
.55	+ .034	+ .117	.5	— .007	+ .126
.64	+ .137	+ .102	.6	+ .082	+ .110
.72	+ .174	+ .080	.7	+ .171	+ .088
.80	+ .165	+ .059	.8	+ .165	+ .059
.88	+ .129	+ .023	.9	+ .123	+ .019
.97	(+ .072)	(— .016)	40.0	(+ .044)	(— .033)

Dalle stazioni boreali ed australi.

	X	Y		X	Y
1938.97	—″.143	—″.044			
1939.06	— .152	— .022	1938.9	—″.068	—″.061
.14	— .147	— .005	39.0	— .150	— .034
.22	— .127	+ .052	.1	— .151	— .017
.31	— .088	+ .103	.2	— .134	+ .038
.39	— .054	+ .128	.3	— .093	+ .099
.47	— .026	+ .131	.4	— .050	+ .129
.55	+ .024	+ .121	.5	— .011	+ .129
.64	+ .126	+ .102	.6	+ .082	+ .112
.72	+ .158	+ .075	.7	+ .154	+ .082
.80	+ .152	+ .038	.8	+ .152	+ .039
.88	+ .086	— .012	.9	+ .074	— .021
.97	(+ .006)	(— .066)	40.0	(— .025)	(— .087)

Con i valori delle coordinate dedotti dalle curve continue del grafico, si è disegnata la polodia che vediamo segnata con tratto continuo nelle due figure, apparendo la traiettoria degli anni precedenti solo tratteggiata. Sono distinte al solito nelle due figure le polodie dedotte basandosi in una (fig. 2) sui dati completi delle sette stazioni, e nell'altra su quelli delle stazioni boreali (fig. 1).

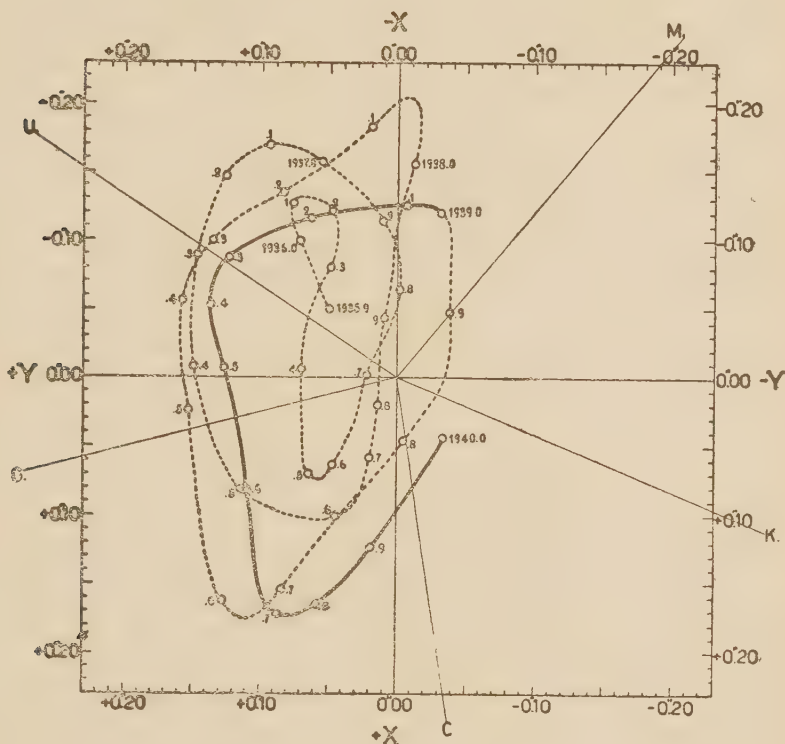



Fig. 1.

Con le coordinate istantanee del Polo dedotte da tutte le stazioni vennero calcolate le corrispondenti variazioni delle latitudini durante il corso del 1939 per i diversi meridiani della Terra che distano di 30° o multipli di 30° dal meridiano fondamentale di Greenwich, che sono riportate nel quadro VII.

Se ora si prescinde dagli errori di osservazione, e si suppone che sieno trascurabili gli effetti dell' imperfetta conoscenza del valore angolare di una rotazione del micrometro di ciascuna stazione, per ciascun valore $\varphi_{oss.}$ della

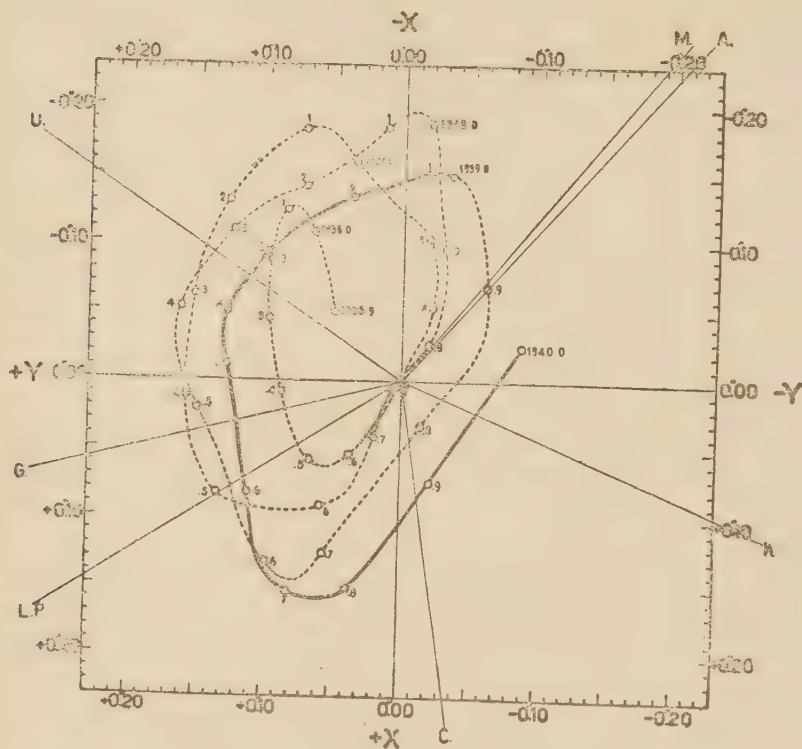



Fig. 2.

latitudine media mensile osservata da ciascuna stazione ed in corrispondenza di ciascun gruppo, avremo evidentemente:

$$\varphi_{oss.} - (\varphi_0 + x \cos \lambda + y \operatorname{sen} \lambda) = d\varphi_0 + \zeta + z + \Delta\delta$$

ove x ed y sono le corrispondenti coordinate istantanee del Polo, λ la longitudine della stazione, $d\varphi_0$ la correzione residua della latitudine ammessa per la posizione media del Polo, $\Delta\delta$ la correzione delle declinazioni medie del gruppo, e ζ e z le variazioni della latitudine non dipendenti dallo spo-

$\Delta\varphi$ *alle diverse* λ.

($\Delta\varphi = x \cos\lambda + y \operatorname{sen}\lambda$)

λ

DATA	-12^h	-10^h	-8^h	-6^h	-4^h	-2^h	0^h	$+2^h$	$+4^h$	$+6^h$	$+8^h$	$+10^h$	$+12^h$
1939.0	+0''.15	+0''.15	+0''.11	+0''.03	−0''.05	−0''.11	−0''.15	−0''.15	−0''.11	−0''.03	+0''.05	+0''.11	+0''.15
.1	+ .15	+ .14	+ .10	+ .02	− .06	− .12	− .15	− .14	− .10	− .02	+ .06	+ .12	+ .15
.2	+ .13	+ .09	+ .04	− .04	− .10	− .13	− .13	− .09	− .04	+ .04	+ .10	+ .13	+ .13
.3	+ .09	+ .03	− .04	− .10	− .14	− .13	− .09	− .03	+ .04	+ .10	+ .14	+ .13	+ .09
.4	+ .05	− .03	− .08	− .13	− .14	− .11	− .05	+ .03	+ .08	+ .13	+ .14	+ .11	+ .05
.5	+ .01	− .06	− .10	− .13	− .12	− .08	− .01	+ .06	+ .10	+ .13	+ .12	+ .08	+ .01
.6	− .08	− .13	− .14	− .11	− .06	+ .01	+ .08	+ .13	+ .14	+ .11	+ .06	− .01	− .08
.7	− .15	− .17	− .15	− .08	+ .01	+ .09	+ .15	+ .17	+ .15	+ .08	− .01	− .09	− .15
.8	− .15	− .15	− .11	− .04	+ .05	+ .11	+ .15	+ .15	+ .11	+ .04	− .05	− .11	− .15
.9	− .07	− .05	− .02	+ .02	+ .06	+ .07	+ .07	+ .05	+ .02	− .02	− .06	− .07	− .07
1940.0	+0''.02	+0''.07	+0''.09	+0''.09	+0''.07	+0''.03	−0''.02	−0''.07	−0''.09	−0''.09	−0''.07	−0''.03	+0''.02

stamento del Polo, ma la prima con carattere generale ed eguale per tutte le stazioni, e la seconda con carattere particolare e proprio di ogni singola stazione. Poichè allora dovrà tendere a zero la somma dei $d\varphi_0$ del complesso delle stazioni poste sullo stesso parallelo, la media dei secondi termini della (1), ricavata dai valori di tutte le stazioni dello stesso parallelo ci darà: $\zeta + \Delta\delta + \frac{1}{n} \Sigma z_i$, e sottraendo ordinatamente dai secondi termini della (1) queste medie, (per ciascun gruppo ed ogni stazione) otterremo la quantità $d\varphi_0 + z - \frac{1}{n} \Sigma z_i$, e pertanto ove si ammetta che le z, di carattere locale, sieno non solo molto piccole, ma che pur anche abbiano un carattere periodico essenzialmente annuo, e che nel corso dell'anno quindi tendano ad annullarsi, la media annuale ci fornirà senz'altro il valore della correzione $d\varphi_0$. Si ebbero in tal guisa come valori delle correzioni da attribuire alle latitudini delle stazioni boreali, riferite al Polo medio i seguenti valori: Mizusawa: $+''.014$; Kitab: $+''.017$; Carloforte: $-''.022$(?); Gaithersburg: $-''.042$ ed Ukiah: $+''.028$, valori che se per alcune stazioni si accordano bene con i risultati di anni precedenti non lo stesso si può dire per altre e particolarmente per Carloforte, ove però potrebbe aver influito notevolmente la mancanza dei tre mesi di osservazioni.

Tenendo conto di queste correzioni si possono avere allora immediatamente per i singoli gruppi e per le diverse stazioni i valori delle $\zeta + z + \Delta\delta$, che troviamo nel quadro VIII che segue, ove i valori della prima linea si riferiscono ai risultati delle osservazioni del gruppo IV eseguite nel decembre 1938 fatte nelle ore del mattino. Una semplice ispezione di quei numeri mostra in generale come, essendo relativamente piccole le variazioni che subiscono le ζ e le z da un mese al successivo, bene si accordino fra di loro i valori ricavati per i diversi gruppi. Vi sono però casi in cui a meno di non ammettere errori di osservazione di un ordine di grandezza non ammissibile troviamo differenze che fanno sospettare fenomeni locali improvvisi. Così ad esempio vediamo che la differenza trovata a Mizusava per il gruppo IX sorpassa i 0''.2: ma se si va a considerare i valori delle latitudini serali troviamo che nelle sere del 4, 5 e 6 giugno con ottime osservazioni di tutte le sei coppie di stelle la iatitudine rlsulta rispettivamente 3''.170, 3''.088 e 3''.207, mentre subito dopo nelle sere del 7, 9, 10 e 12 sale a 3''.488, 3''.430, 3''.420 e 3''.483. Se ora si tien conto che analogamente appare per il gruppo VIII un abbassamento del valore della latitudine negli ultimi giorni di osservazione di quel gruppo, ed un sensibile aumento invece per il gruppo X nei primi giorni dell eosservazioni del gruppo stesso, vien fatto di dubitare che possa trattarsi di un fenomeno locale reale in virtù del quale sia apparsa bruscamente alterata la latitudine locale. Ma approfondire tali indagini come a tentare di scindere i valori delle ζ e z dalla $\Delta\delta$ appare qui prematuro, e potrà invece tentarsi nella ricerca, che è attualmente in corso di

Quadro VIII.

Gruppo	Epoca		Mizus.	Kitab	Carlof.	Gaith.	Ukiah	Media
IV	8.97	m.	+ .038	+ .097	— 072	+ .102	— .053	+ .022
IV	9.06	s.	— .013	— .005	— .045	— .183	— .052	— .060
V	9.06	m.	+ .140	— .060	+ .090	+ .171	+ .144	+ .097
V	9.14	s.	+ .138	+ .031	+ .147	+ .140	+ .114	+ .114
VI	9.14	m.	— .047	— .211	— .027	— .107	— .138	— .108
VI	9.22	s.	— .015	— .094	+ .001	— .061	— .115	— .057
VII	9.22	m.	+ .052	— .024	+ .009	— .049	— .105	— .023
VII	9.31	s.	+ .076	— .002	. —	+ .080	— .014	+ .035
VIII	9.31	m.	+ .109	— .045	. —	+ .053	+ .037	+ .038
VIII	9.39	s.	+ .148	— .017	. —	+ .170	+ .097	+ .096
IX	9.39	m.	+ .261	+ .321	. —	+ .118	+ .209	+ .227
IX	9.47	s.	+ .034	+ .209	. —	+ .178	+ .216	+ .059
X	9.47	m.	— .101	+ .059	. —	+ .097	+ .097	+ .038
X	9.56	s.	— .046	+ .019	+ .087	+ .105	+ .040	+ .041
XI	9.56	m.	— .210	— .029	— .043	— .058	— .051	— .078
XI	9.64	s.	— .003	— .027	— .048	— .021	— .050	— .030
XII	9.64	m.	— .051	— .025	— 105	— .078	— .061	— .064
XII	9.73	s.	— .054	— .102	— .046	— .046	— .072	— .064
I	9.73	m.	— .179	— .001	— .135	— .118	— .054	— .097
I	9.80	s.	— .124	+ .008	— .184	— .131	— .079	— .102
II	9.80	m.	+ .012	+ .046	+ .153	+ .135	+ .120	+ .093
II	9.89	s.	+ .150	+ .121	+ .122	+ .120	+ .079	+ .118
III	9.89	m.	— .099	— .026	— .269	— .166	— .159	— .144
III	9.97	s.	— .109	— .059	— .179	— .178	— .097	— .124
IV	9.97	m.	— .021	— .038	— .108	— .118	— .065	— .070

elaborazione e che comprenderà la discussione dei risultati dei quattro anni ottenuti in tutte le stazioni.

Ai lunghi lavori di calcolo hanno partecipato con lodevole assiduità ed attenzione come negli anni precedenti le signorine: A. Chiavazzo, A. De Maria, V. Esposito, E. Pisano, G. Pizza ed A. Salzano.

Capodimonte, 3 maggio 1940 - XVIII.

Elementi matematici per l'economia corporativa.
(Il problema di « minimo » posto dalle Corporazioni)

Nota del prof. **Giuseppe Palomba**, *presentata dal socio corr.* **Giulio Andreoli**

(Adunanza del dì 4 maggio 1940 - XVIII)

Sunto. — L'autore nel prendere in esame il processo di produzione nella sua concezione unitaria (corporativa) pone il problema fondamentale che la « corporazione fascista » è chiamata a risolvere; problema che consiste non solo (o non tanto) nel rendere minimo il costo del prodotto riferito all'ultimo stadio di lavorazione bensì nel rendere più economico l'intero ciclo produttivo, anche — perciò — nel caso particolare in cui il detto costo del prodotto finito non subisca riduzioni di sorta.

Con il presente scritto ci proponiamo di iniziare uno studio organico, che prenda in esame il processo produttivo nella sua concezione unitaria e sintetica, secondo la visione caratteristica che ne ha l'ordinamento corporativo italiano [1]).

Secondo, appunto, tale visione non si può considerare il costo d'un certo bene — diretto o strumentale che sia — prescindendo dalla natura ereditaria di sua formazione ma è necessario, proprio, prendere in esame cotesta natura: *è necessario, cioè, considerare non il « costo » ma la « funzione costo » in relazione al grado* (o *stadio*) *di lavorazione.* Sarebbe opportuno diffondersi accuratamente sulla nozione di questo « grado lavorativo » ma, per il momento, ci contentiamo di darne una definizione — anche se alquanto grossolana — in certo modo coincidente col concetto empirico che — di esso — in genere, si ha. In tal modo « grado lavorativo » è sinonimo di grado di manipolazione d'un certo bene strumentale (materia prima) che, via via, va trasformandosi in bene di consumo diretto: che, cioè, acquista, sempre più, le caratteristiche del bene usufruibile direttamente dal consumatore. Ogni grado lavorativo ha il suo costo. Per convenzione chiameremo « grado zero di lavorazione » quel grado in cui il bene strumentale considerato non è ancora stato, comunque, manipolato: il grado zero, adunque, coincide col bene così come ci viene offerto dalla natura (grano ma-

---

[1]) Per una visione d'insieme di detta concezione del processo produttivo, si veda: Giuseppe Palomba. *Le grandezze fondamentali dell' economica corporativa.* In: « Giornale degli economisti ed Annali di economia », 1940. È doveroso avvertire che, in queste note, ci prefiggiamo di porre più che di risolvere i vari problemi che, di loro natura, si mostrano straordinariamente complessi.

turato e non mietuto, frutta maturata e non raccolta, minerale allo stato indifferenziato così come esiste nelle miniere, etc.). Chiameremo, invece, « grado uno di lavorazione » quel grado in cui il bene è pronto per essere usufruito dal consumatore diretto (pane presso il fornaio, frutta presso il fruttivendolo, minerale allo stato differenziato sotto forma di oggetto d'uso, etc.). È evidente che si passa dal grado zero al grado uno per mezzo d'un numero, più o meno esteso, di operazioni: immaginiamo queste operazioni individuate lungo un certo tratto continuo d'una punteggiata x [1]): ad ogni punto della x corrisponderà, allora, un certo grado lavorativo ξ compreso fra zero ed uno. Sarà cioè:

$$0 < \xi < 1.$$

Se indichiamo con y il costo *complessivo*, potremo porre:

$$y = f(x). \tag{1}$$

Per quanto si è detto y è funzione crescente di x.

Deriviamo rispetto ad x. Sarà:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) \tag{2}$$

la relazione che ci definisce il costo *specifico*: quella, cioè, che ci dice qual'è il costo proprio d'un certo grado isolato di lavorazione, considerato *in se ipso.*

In realtà il concetto di « funzione costo » non è estraneo all'economia liberale. L'esistenza del cosidetto « conto lavorazione » è la riprova evidente della necessità sentita, in cotesto regime, d'una rilevazione contabile del *processo di formazione del costo.* Il conto lavorazione, infatti, ci pone in grado di seguire sia la formazione del costo complessivo, analiticamente espresso dalla (1), sia l'altezza dei singoli costi specifici, analiticamente espressi dalla (2). L'unica differenza, del resto essenziale, che esiste fra il regime liberale e il regime corporativo consiste nel fatto che il primo non ha un organo, gerarchicamente superiore alle industrie singole, entro le quali l'intero processo produttivo viene a frantumarsi, capace di coordinare le molteplici direttive individuali. Vedremo, fra poco, le conseguenze che, da questo stato di cose, ne derivano.

---

[1]) Prescindiamo dal *tempo* necessario per passare da uno stadio lavorativo al suo successivo: sono complicazioni che introdurremo via via in note successive. Per ora ci manteniamo del tutto agnostici su questo elemento.

Ritorniamo un momento alla (1). Essa lega il costo complessivo al grado lavorativo. Evidentemente fra i due elementi deve esistere un ente intermediario capace di farci cogliere il genere di dipendenza che lega la prima alla seconda grandezza. Questo ente intermediario è, logicamente, costituito dall' attrezzatura tecnica di cui, il ciclo produttivo in esame, dispone: attrezzatura tecnica di cui la *complessità dell' equilibrio* ci fornisce un indice abbastanza esatto. Per complessità dell' equilibrio intenderemo un multiplo intero del rapporto fra il numero delle maniere secondo cui ν unità di beni strumentali possono ripartirsi fra le n imprese esistenti sul mercato e il numero delle maniere secondo μ unità di beni diretti e strumentali insieme possono ripartirsi fra le stesse n imprese ($\mu > \nu$). Sarà allora:

$$w = k \frac{\dfrac{(\nu + n)!}{\nu!\, n!}}{\dfrac{(\mu + n)!}{\mu!\, n!}} = k \frac{\mu!}{\nu!} \frac{(\nu + n)!}{(\mu + n)!} .$$

Ora è possibile riferire il valore di w ai singoli stadi di lavorazione: basta porre al posto di n il numero di imprese che svolgono la loro attività fino allo stadio di lavorazione considerato, basta porre al posto di ν il volume produttivo dei beni — da considerarsi *strumentali* per il medesimo stadio di lavorazione — e basta, infine, per ottenere μ, aggiungere a ν il volume produttivo dei beni — da considerarsi *diretti* — posti in essere proprio dallo stesso stadio lavorativo considerato. Anche w sarà, allora, una funzione (crescente) di x. E potremo porre [1]:

$$w = \varphi(x).$$

La (1), allora, dovrà scriversi, più propriamente:

$$y = f[x, w(x), w'(x)] \qquad (1')$$

intendendo che il costo è, nel caso generale, funzione del grado lavorativo in quanto dipende, funzionalmente, della complessità dell' equilibrio e dall' andamento specifico che quest' ultima assume rispetto al grado lavorativo stesso.

Ciò posto siamo in grado di cogliere l' essenza del problema che si pone l' economia liberale e l' essenza del problema che si pone l' economia corporativa.

È plausibile supporre che l' intero processo di lavorazione sia diviso

[1]) Particolare importanza ha il valore $w(1)$ che chiameremo W.

in un certo numero di industrie ciascuna svolgente, indipendentemente da tutte le altre, la propria attività produttiva.

È anche plausibile supporre che ciascuna industria comprenda un certo numero di stadi lavorativi: ciò per evidenti ragioni, sia tecniche che economiche. Supponiamo, allora, che la prima di queste industrie agisca fra gli stadi $0, \alpha$; la seconda fra gli stadi α, β; . . . . . ; la penultima fra gli stadi ξ, ζ; l' ultima fra gli stadi $\zeta, 1$. Un' impresa qualsiasi, allora, che svolge la sua attività produttiva fra gli stadi di lavorazione $x = \rho, x = \sigma$ — *nell' ipotesi dell' economia liberale e della costante uguaglianza del prezzo di vendita col costo di produzione* — si sforzerà di lasciare sviluppare il suo costo complessivo, costantemente, su una linea di minimo [1]).

Poichè, nel caso generale, l' area da considerarsi può supporsi data, nel nostro caso, da:

$$J = \int_{\rho}^{\sigma} f[x, w(x), w'(x)]\, dx \tag{3}$$

il nostro imprenditore si sforzerà di rendere non solo minimo il valore di $f(\sigma)$, bensì farà in modo che sia anche:

$$J = minimum. \tag{4}$$

In verità questo è un solo aspetto del problema generale. Quell' aspetto che potremo definire come *tecnico* nel senso che, noto il volume produttivo da porre in essere, ci si sforza di sfruttare al massimo la complessità dell' equilibrio esistente cercando di raggiungere quella combinazione di fattori produttivi che si palesa più vantaggiosa. Accanto all' aspetto tecnico del problema esiste l' aspetto *economico* propriamente detto che si propone, appunto, di determinare, note le condizioni generali del mercato che si palesano nella esistenza della curva dei prezzi (sempre in funzione del grado lavorativo), di determinare — dicevamo — quale debba essere il volume produttivo da porre in essere. Aspetto tecnico ed aspetto economico sono, adunque, le due facce d' un *medesimo ed identico* problema: si può supporre di affrontare l' uno dei due solo allorquando l' altro è già stato determinato: in particolare è comodo risolvere l' aspetto tecnico del problema della produzione allorquando si suppone risolto il suo aspetto strettamente economico. Il primo si risolve in una questione di *costi*, il secondo in una questione di *quantità*.

Ciò posto v' è da osservare che le condizioni (3) e (4) portano alla determinazione d' una *curva puramente teorica*: la *curva reale* consisterà, in generale, in una poligonale (rettilinea o curvilinea) iscritta o circoscritta

[1]) In altra nota sarà opportuno prendere in esame la possibilità della non coincidenza del prezzo col costo e dedurne le possibili e varie conseguenze.

alla curva teorica. Se ciò accade — e non può esservi dubbio che ciò debba necessariamente accadere, specialmente ove si tien conto del carattere essenzialmente discontinuo dell' asse delle x che, nel nostro caso, indica il grado lavorativo — è necessario che alla (3) e alla (4) si aggiunga una nuova condizione: che cioè l' area compresa tra la curva teorica e quella reale sia, a sua volta, un minimo *o*, a seconda dei casi, un massimo. Con questa riserva possiamo continuare a ragionare sulla curva teorica quale c' è fornita dalle condizioni (3) e (4).

Nella (3) il valore di $y = f(\rho)$ è una grandezza essenzialmente nota in quanto rappresenta il prezzo d' acquisto del prodotto del ciclo lavorativo in esame giunto al grado ρ^{mo} di manipolazione, prodotto che — l' industria di cui ci stiamo occupando — acquista senz' altro sul mercato. Non sempre, invece, almeno nel caso generale, possiamo considerare come noto l' altro valore $y = f(\sigma)$, in quanto che esso può venire ad esser compreso, nel piano (x, y), in tutto un segmento, parallelo all' asse delle y, di cui — a sua volta — l' estremo inferiore è dato dal valore $y = f(\rho)$ eventualmente aumentato dell' interesse per tutta la durata di questo (parziale) ciclo capitalistico e di cui l' estremo superiore è dato dal prezzo di mercato del prodotto giunto allo stadio σ^{mo} di lavorazione. È noto che tale difficoltà non complica, nella sua essenza, il problema variazionale che stiamo trattando.

In economia corporativa, poichè esiste un organo che è superiore alle singole industrie appartenenti ad un medesimo ciclo lavorativo — anzi ad un medesimo complesso di cicli lavorativi affini — il problema di minimo così come se lo pongono le varie Corporazioni e, perciò, la Corporazione a cui appartiene il ciclo che stiamo esaminando, si sposta da un piano più ristretto ad uno molto più ampio, nel quale — perciò — vengono rimosse completamente le tappe: $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots . . \rho, \sigma, \ldots . ., 1$ in cui il ciclo esaminato veniva a frantumarsi.

Alla (3), allora, si sostituisce un' altra espressione del tipo:

$$I = \int_0^1 F\,[x\,, w\,(x)\,, w'\,(x)]\,dx \tag{3'}$$

e alla (4), l' altra:

$$I = minimum. \tag{4'}$$

Almeno in generale dovrebbe risultare:

$$I < \Sigma J. \tag{5}$$

Non inganni, tuttavia, la disuguaglianza espressa dalla (5). Il risparmio nel costo non è un risparmio netto: da esso bisogna detrarre l'aumento di costo dovuto — come egregiamente si esprime il PAPI — al mantenimento della nuova burocrazia [1]). Posto, in sostanza:

$$J - I = j$$

e chiamato η ciò che costa allo Stato il mantenimento della nuova burocrazia deve risultare — *per la economicità del nuovo regime*:

$$j > \eta.$$

Tale economicità del nuovo regime — ove possa essere di fatto realizzata — costituisce un potente argomento in favore dell'autarchia in regime corporativo, nel caso dell'economia di guerra.

Qui si profila un problema di «economia finanziaria» strettamente connesso col problema di «minimo» ora trattato. Come, cioè, deve ripartirsi il costo η fra le varie industrie che partecipano al medesimo ciclo produttivo? Da quanto abbiamo riferito non par dubbio che — nota la curva $y = f(x)$ — il costo η debba andare a gravare quegli stadi lavorativi che più hanno visto diminuire il loro costo per effetto del nuovo ordine instaurato. Così, ad esempio, se la y in regime corporativo è un arco di cerchio compreso fra i punti $f(0)$ e $f(1)$ e rivolgente la propria concavità all'asse delle x mentre in regime liberale era costituita da una successione di segmenti rettilinei formanti una unica retta passante der gli stessi due punti $F(0)$ e $F(1)$, in cui è:

$$f(0) = F(0)$$
$$f(1) = F(1)$$

il costo del nuovo ordine instaurato dovrebbe gravare, in una proporzione massima, sui gradi lavorativi centrali ed in una proporzione, via via decrescente, sugli stadi lavorativi via via più lontani (nell'una o nell'altra direzione) da quegli centrali ora detti.

Sia la (4) quanto la (4') — così come il problema è stato posto — determinano nel piano x, y delle linee che risolvono perfettamente la questione. Per la (4), infatti, si tratterà — come è noto — di integrare l'equazione differenziale del tipo:

$$\frac{\partial f}{\partial w} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial w'}\right) = 0$$

---

[1]) Cfr.: G. U. PAPI, *Lezioni di economia politica generale e corporativa.* Padova, 1934, vol. III, parte II.

e per la (4′) di integrare l' altra equazione:

$$\frac{\partial F}{\partial w} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial w'}\right) = 0.$$

Tuttavia la differenza fra la concezione liberale e la concezione corporativa è ancora più profonda di quanto possa sembrare da quello che abbiamo riferito fin qui. Invero, l' economia liberale risolve il problema di « minimo » — sia pure fra i due limiti ρ e σ — non tenendo conto di nessun altro elemento. Viceversa l' economia corporativa risolve lo stesso problema — bensì fra i più lontani limiti 0 , 1 — ma prendendo, simultaneamente, in considerazione anche altri elementi: *il problema dell' economia corporativa si avvicina di più al tipo dei problemi di « minimo condizionato »*. Ad esempio: gli organi corporativi potrebbero imporre che il costo $y = f(x)$ risultasse minimo compatibilmente colla condizione che la funzione occupazione operaia definita da:

$$\Omega = \varphi\,[x\,,\,w\,(x)\,,\,w'\,(x)]$$

risultasse d' un certo valore prefissato nell' intervallo 0 , 1: vale a dire che la (3′) e la (4′) devono verificarsi, subordinatamente alla condizione:

$$\int_0^1 \Omega\,(x) = K.$$

Altre complicazioni, fra cui principalmente l' altezza del salario corporativo, riguardano più che altro le costanti che operano nelle equazioni che determinano l' equilibrio corporativo.

Catania, R. Università, aprile 1940 - XVIII.

Appunti geologici sulla grotta di Pertosa

Nota del dott. **Giovanni Flores,** *presentata dal socio ord.* **G. D' Erasmo**

(Adunanza del dì 1. giugno 1940 - XVIII)

Sunto. — Di questa grotta, già nota per precedenti ricerche speleologiche e paletnologiche, viene qui data una breve descrizione geologica. Un primo capitolo si riferisce particolarmente all' origine delle acque, che ne percorsero o ne percorrono tuttora le diverse cavità, ed ai fenomeni carsici superficiali, che si riscontrano negli immediati dintorni. Un altro esamina dettagliatamente gli antri, i corridoi, i cunicoli sotterranei ed i principali fenomeni in essi osservati.

« Sic gyrant lymphae, terrae excurrendo per alvum,
Non etenim magis ascendunt vaga flumina nostras
Ad parteis, quam descendant repetendo profundum
Ut rursum emergant, instauratique reportent
Illud idem fontes, quod iam retulere ».
(Giordano Bruno,
De Immenso et Innum., cap. IX, lib. IV)

Introduzione

La grotta di Pertosa, che si apre quasi di fronte al paese omonimo nelle pendici del massiccio dell' Alburno, è posta quasi sul confine della Campania con la Lucania, tra i comuni di Pertosa e di Auletta. Per il passato è stata oggetto tra questi due comuni di controversie e dispute, risoltesi soltanto nel 1939 con la definitiva assegnazione di essa al Comune di Auletta.

Piuttosto scarse sono le notizie storiche concernenti la Grotta, abitata dalla prima età dei metalli, e forse ancor prima, fino all' epoca greco-romana. Tranne qualche rara citazione del tutto accidentale in autori latini, principalmente riguardanti il Tanagro, fiume a cui d' altronde la storia della Grotta è intimamente connessa, è solo dall' inizio del secolo XVI che noi abbiamo una descriziane, sia pure sommaria, della grotta di Pertosa, quando cioè F. Leandro Alberti bolognese ne trattò nella sua « Descritione di tutta Italia » [1]). Il frate bolognese ci ha tramandata un' approssimativa misura, da cui risulterebbe che a quell' epoca l' antro misurasse 30 piedi di altezza e 50 di larghezza e fosse tutto invaso dall' acqua, eccezion fatta

per uno scoglio al centro, su cui è un altare consacrato all' Arcangelo S. Michele.

Naturalmente appare chiaro che l' ALBERTI visitò il solo antro di ingresso, il quale rappresenta forse la sola quinta parte della totale estensione delle gallerie e cunicoli oggi conosciuti.

Per trovare qualcosa di un certo valore scientifico bisogna giungere a tempi molto vicini a noi, sul finire cioè del secolo scorso, nel 1899, quando fu pubblicata una memoria di Giovanni PATRONI [13]) sugli avanzi preistorici della grotta, e poi ancora nel 1907 l' opera di Paolo CARUCCI [3]), che, pur limitandosi alla descrizione del solo antro d' ingresso, apportò un notevole contributo alla conoscenza della grotta di Pertosa.

Per quanto questa grotta fosse abbastanza nota in tutto il Mezzogiorno la prima spedizione a carattere puramente speleologico e topografico fu condotta nel 1927 da un gruppo di speleologi trentini, che ne ricavarono la prima pianta e le prime sezioni, pubblicate ne « Le vie d' Italia » di quell' anno [14]).

Da parte di vari Enti turisiici si è diffusa sempre più la conoscenza di questa splendida grotta in questi ultimi anni e si è provvisto a renderla accessibile, a disporvi una razionale ed artistica illuminazione in gran parte delle gallerie, per cui c'è da augurarsi che il numero dei visitatori aumenti sempre più.

CAPITOLO I.

Appunti geologici sulla regione di Pertosa. Le acque. Ipotesi sull' origine delle acque della grotta. Le doline.

La catena dell' Alburno appare fin dalla Piana di Eboli come una chiara barriera calcareo-dolomitica, con le pareti a picco su una base selvosa, ed offre forse il migliore esempio di paesaggio dolomitico nell' Appennino meridionale.

Su una potente pila di dolomia del Triasico superiore, in parte stratificata e in parte massiccia, si sovrappone con lieve discordanza una serie di calcari ippuritici, spesso dolomitici, bianchi o giallognoli del Cretacico medio, con generale pendenza verso Sud, che lasciano spesso scoperta la sottostante dolomia triasica, la quale così oltre a formare la maggior parte della barriera ripida verso Nord, s' incontra talvolta a settentrione sulle vette maggiori.

L' andamento generale dell' asse maggiore della catena montuosa è presso a poco ESE-ONO.

I terreni più recenti, dell' Eocene e del Pliocene, si presentano piuttosto irregolarmente tra le grandi pieghe delle valli e come ricoprimenti delle pendici più basse dei calcari mesozoici.

L'Eocene medio, in facies argillosa, argillo-scagliosa, scistosa, e l'Eocene superiore, ad arenarie variamente colorate, si presentano tutto intorno alla catena montuosa, mentre il Miocene è appena rappresentato, in prevalenza da arenaria gessosa, a sud dell'Alburno presso Castelcivita ed in altre poche località, e il Pliocene, in puddinghe a cemento calcareo, a NE della catena sulla riva destra del Tanagro. La collina su cui è edificata Pertosa è costituita appunto da puddinghe a grossi elementi silicei del Pliocene superiore.

Infine i terreni quaternari compaiono in detriti e ghiaieti spesso anche stratificati, sotto le ripidi pareti del massiccio verso settentrione.

Citiamo, perchè maggiormente connessi con la regione che ci interessa, i terreni pleistocenici del Vallo di Diano, immensa valle che si estende per circa 40 km. da N a S lungo il fianco orientale della catena e che dagli studi di MALLET, WALTERSHAUSEN e DE LORENZO [5]) risultò essere il letto di uno degli ultimi grandi laghi post-terziari e precisamente quello che finì di vuotarsi quasi in epoca storica.

Sul fondo piatto del Vallo di Diano scorre il Tanagro, che, nato dalle pendici del M. Sirino presso Lagonegro, entra nel Vallo e lo percorre per tutta la sua lunghezza da S a N fino a Polla, dove con una curva dirige il suo corso verso O, parallelamente all'asse principale della catena dell'Alburno, per gettarsi nel Sele a settentrione della giogaia.

Un tempo si supponeva che il Tanagro avesse un corso sotterraneo, per cui era facile spiegare l'origine delle molte acque sotterranee dell'Alburno. PLINIO nei « *Miracula aquarum fontium* » scrive:

« *In Atinate campo fluvius mersus post XX m. passus exit* ».

Il *fluvius* di PLINIO fu identificato col Tanagro dagli autori posteriori, che incorsero nello stesso errore del grande naturalista latino scambiando il Tanagro col Negro, il fiume cioe che esce dalla grotta. Sta di fatto, qualunque sia la interpretazione del passo di PLINIO, che il Tanagro in epoca romana [5]), giunto presso Polla si inabissava in parte nelle « crive » o pozzi di assorbimento, ora molto ridotti di dimensioni, di cui anche i Borboni si servivano per smaltire l'acqua eccedente del Tanagro.

Dalle crive di Polla, come cercherò di dimostrare, l'acqua veniva condotta alla grotta in epoca antichissima, probabilmente prima della venuta dell'uomo in queste contrade, e il crollo, che ostruì il condotto facendo impaludire la zona e di cui restan tracce evidenti nelle due doline poste sull'asse crive — Grotta, non avvenne in epoca romana, come CARUCCI sostenne [3]), ma bensì in epoca pre-paleolitica, agli inizi del Quaternario. L'ALBERTI dopo aver visitato quei luoghi nel 1526 scrisse dell'esistenza di una palude presso Polla, da cui « per segreto cunicolo » l'acqua andava ad alimentare il fiume uscente dalla grotta [1]); ciò che prova se non altro che all'inizio del 1500 la palude di Polla esisteva ancora.

Per provare ora come l'acqua uscente dalla Grotta di Pertosa non sia quella del Tanagro basta considerare i seguenti fatti:

Il Tanagro è deviato in due punti, presso S. Arsenio e presso Polla. Nè l'una nè l'altra deviazione corrispondono con la Grotta; infatti l'acqua di S. Arsenio si scarica nell'apertura circolare, parte naturale e parte in fabbrica, che attraverso due canali sotterranei, i quali dopo circa 60 m. si riuniscono, va ad alimentare il fiume Fasanella come già fu asserito da Manuelli [11]); quella di Polla invece si elimina per mezzo di un canale costruito perchè il Tanagro non si impaludasse a N del Vallo di Diano.

Inoltre va considerato, che quando le acque vengono deviate dalla foce la portata del fiume di Pertosa non ne risente, mentre quella del Fasanella diminuisce sensibilmente. Analogamente per la deviazione delle crive di Polla è assodato, che immettendovi l'acqua del Tanagro non aumenta la portata del fiume della Grotta. Bisogna dunque spiegare diversamente quale sia l'origine dell'acqua della Grotta e quale la storia della relazione tra crive e Grotta.

Al Tanagro, al Calore, al Sele, che sono i tre fiumi dell'Alburno, affluiscono innumerevoli torrenti, rivi e ruscelli, molti dei quali, come il piccolo fiume uscente dalla Grotta di Pertosa, vengono a giorno dalle viscere del monte; inoltre numerose sono le sorgenti e si può anzi notare una linea di resorgiva che decorre da Nord a Sud lungo la parte occidentale del Vallo di Diano.

Tutte queste sorgenti vengono a giorno nel piano di contatto di due terreni diversi e precisamente del calcare cretacico con l'alluvionale lacustre quaternario o le argille scagliose eoceniche.

Inoltre esse sono in relazione alla inclinazione, in quel punto, degli strati calcarei, che nella maggior parte dei casi s'immergono fortemente verso l'altro terreno. Infatti l'acqua raccolta dalle alte testate degli strati ora disposti come vetta, ora come cresta al disopra delle sorgenti, filtra attraverso i meati della roccia stessa scivolando tra strato e strato per la forte pendenza e, giunta ad incontrare terreni meno permeabili, emerge.

Analogo fenomeno deve avvenire nella Grotta, dove la pendenza degli strati è verso il fondo, proprio dove sono le sorgenti.

Questa ipotesi è convalidata dal fatto che la Grotta, aprendosi in terreno triasico non stratificato, si addentra da Ovest ad Est per una estensione complessiva di 2500 m. di grotte e corridoi, mentre l'asse maggiore si stende per 920 m. Se ora consideriamo la forte inclinazione, 25°-30°, degli strati cretacici sovrapposti alla dolomia (vedi fig. 3 interc.), è chiaro che l'asse della Grotta perforando la dolomia incontrerà dopo di questa il terreno cretacico nell'interno del monte e taglierà quindi il piano di contatto tra i due terreni.

Secondo le mie osservazioni detto piano coinciderebbe presso a poco con una linea retta passante per i punti H ed O della pianta annessa

(v. fig. 5). Al di là di questa linea infatti abbiamo evidente stratificazione ed evidentissimi segni di solubilità maggiore; non tenendo conto per ora di fenomeni specifici, basterà osservare la pianta della Grotta per notare che a destra di questa linea immaginaria la quantità di gallerie e cunicoli profondamente incagliati è senz' altro unica in tutta la grotta.

Esposta la mia ipotesi sull'origine di queste acque ipogee, ritengo interessante notare, che in corrispondenza delle precipitazioni della regione le piene del fiume Negro hanno un ritardo di qualche giorno, tempo questo impiegato dall'acqua piovana per giungere di nuovo all'esterno dopo aver attraversato gli strati in pendenza ed i bacini di raccolta.

Quali fenomeni carsici superficiali di notevole importanza degli immediati dintorni della Grotta dobbiamo registrare la presenza di due doline, grandi cavità imbutiformi che si aprono al disopra della Grotta l' una a 393 m., l' altra a 450 m. sul mare, e distano tra loro circa un km.

La prima dolina (fig. 1) è la meno profonda: 30 m. di profondità, circa

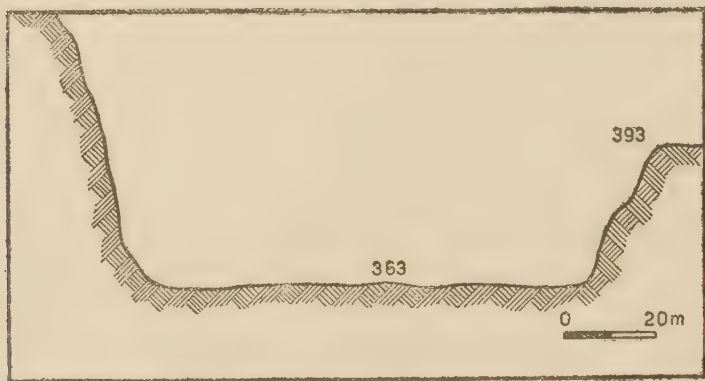



Fig. 1. — Profilo della prima dolina.

200 m. di larghezza in alto, restringendosi fino a circa 100 m. di diametro sul fondo, leggermente ellittica, con l' asse maggiore in direzione EO. Le pareti, che ad Ovest scendono a picco, non mostrano alcuna stratificazione evidente sulla roccia nuda, ad E e S invece sono ricoperte di vegetazione essendo meno inclinate e più soleggiate. Il fondo è quasi totalmente rivestito di terra rossa coperta di vegetazione selvaggia; negli spazi liberi è visibile il terreno detritico, ma non si notano cavità o inghiottitoi.

La seconda dolina (fig. 2) è molto più profonda e più stretta: il profilo secondo E SE-O.NO mostra una profondità massima di 107 m., e cioè 27 fino al primo ripiano e 80 da questo al fondo, 100 m. di larghezza in alto (larghezza non massima). Anche questa dolina è leggermente ellittica, anzi

un po' più della prima; le sue pareti sono interamente rivestite di vegetazione; il fondo del primo ripiano è costituito interamente di terra rossa coltivata, su cui si appoggia uno stretto conoide di detriti che, unendosi ad uno simile proveniente dalla parete a sud, si dirige verso il fondo estremo della dolina, mentre la parete ad O cade quasi a picco con un salto di 100 m. di roccia. Il fondo della dolina è molto ristretto e sul lato O presenta due inghiottitoi che subito si restringono rendendo impossibile proseguirne l' esplorazione.

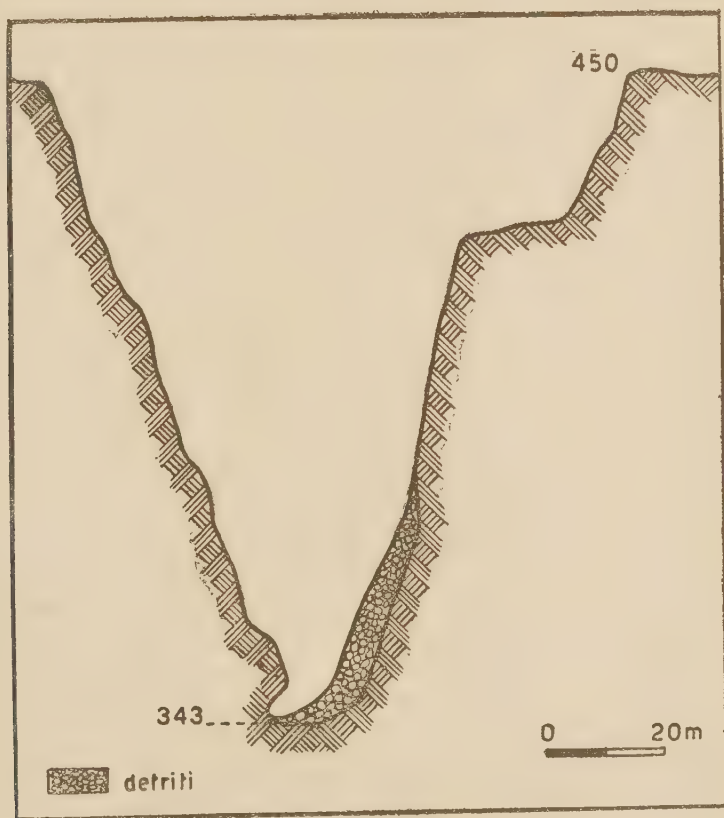



Fig. 2. — Profilo della seconda dolina.

Questa dolina presenta le caratteristiche di un crollo avvenuto in due tempi: il primo collasso produsse il primo ripiano, cioè il fondo primitivo; un secondo crollo fece abbassare il fondo di altri 80 m. Essendo il fondo attuale della Grotta nella caverna E (v. pianta alla fig. 5), la più vicina a questa dolina, a 278 m. sul mare, il dislivello tra questo punto e il fondo della dolina risulta di 65 m., per cui si può supporre che col secondo crollo

il cedimento della volta abbia colmato di detriti lo spazio fra la dolina e la Grotta. Sia nell'una che nell'altra dolina l'accumulo di materiale detritico, che con i millenni può anche essersi cementato, deve aver reso più difficile il passaggio dell'acqua meteorica, pur non ostruendo tutti i meati, altrimenti avremmo ora due stagni o due laghetti di fondo nelle doline.

La supposizione che le due doline fossero le tracce di un canale sotterraneo di unione fra le crive di Polla e il fondo della Grotta è dovuta al Carucci [3]). Questa ipotesi porterebbe come conseguenza che una relazione tra l'acqua del Tanagro e quella del fiume della Grotta abbia dovuto esistere. Ora dallo studio dell'interno della Grotta risulta quanto segue:

a) In quei tempi remoti una gran copia d'acqua doveva riversarsi nel corridoio principale, ora asciutto, il più settentrionale dei tre, uscendo per il braccio principale di ingresso dove tuttora scorre il fiume; e ciò a giudicare dai manifesti segni della violenta erosione subìta dalle pareti di questi due corridoi fino all'altezza di qualche metro (vedi fig. 1 tavola annessa).

b) Per essersi formato un sì gran numero di stalattiti e stalagmiti in questo corridoio ora asciutto bisogna dedurre che da tempo immemorabile l'acqua non corre più sul suo fondo.

Il Carucci affermava che il crollo delle doline fosse avvenuto in epoca romana, ma se così fosse stato, 2000 anni non sarebbero bastati alla produzione di tale e tanta quantità di stalattiti e stalagmiti che sono andati a sovrapporsi alle tracce delle erosioni (vedi fig. 1 tavola annessa).

Inoltre, supponendo che il canale poi crollato fosse stato capace di smaltire tutta o quasi l'acqua del Tanagro, una sì gran copia di acqua uscente dalla grotta non avrebbe permesso l'impianto di palafitte e quindi l'abitabilità della grotta stessa. Poichè è provato che essa fu abitata dalla fine del Paleolitico in poi, è chiaro che l'obliterazione del condotto deve essere avvenuta in epoca prepaleolitica e cioè nella prima metà del Quaternario.

E ancora l'esistenza di un banco alto un m. di pozzolana sotto la prima dolina, qualunque sia la sua provenienza (quasi certamente flegrea), fa pensare che essa sia giunta qui con le eruzioni post-plioceniche dei vulcani meridionali. Per essere quindi il banco misto ai detriti della dolina, il crollo non può essere avvenuto posteriormente a queste eruzioni.

Possiamo dunque concludere che all'originarsi della Grotta l'acqua doveva essere moltissima. In questo momento avvenne l'erosione del corridoio principale e di quello d'ingresso tuttora invaso dall'acqua, il cui livello è ora di qualche metro più basso dell'antico. Avvenuto il crollo e la conseguente obliterazione del condotto, che fu una delle cause principali dell'impaludamento della zona settentrionale del Vallo di Diano, l'acqua cessò di scorrere per il corridoio principale e, finita l'opera di erosione, incominciò il lavoro della formazione di stalattiti e stalagmiti, che tuttora dura.

Bisogna però tener conto delle acque sorgive; infatti nulla esclude che l'esistenza delle odierne sorgenti fosse contemporanea al deflusso principale, comunque esse rappresentano la sola origine delle acque attualmente correnti.

Capitolo II.

Descrizione della Grotta con particolare riguardo ai fenomeni più interessanti riscontrati.

La Grotta di Pertosa giace nelle progaggini settentrionali della catena dell'Alburno, a circa 50 m. sul letto del Tanagro, sulla riva sinistra, nel punto in cui questo con un bel salto incide gli strati calcareo-dolomitici del Trias superiore con la cascata di Maremanico (vedi fig. 2 tav. annessa), a 263 m. sul livello del mare.

Questa Grotta va ascritta tra quelle originatesi per una lunga e vasta frattura, che in questo caso interessa i terreni mesozoici (fig. 3). Questa

Fig. 3. — Sezione tra la zona delle crive e il fondo della grotta: il piano inclinato indica l'asse della frattura.

lunga frattura dirige il suo asse da NO a SE ed è evidente verso l'estremità settentrionale del Vallo di Diano. Infatti se si segue l'asse immaginario che unisce il fondo della Grotta con la zona delle crive (fig. 4), si osserva innanzi tutto che le due doline sono su questo asse e che delle evidenti dislocazioni hanno avuto luogo nella roccia al disopra delle crive stesse presso Polla, originando gli inghlottitoi attuali che risultano essere i resti di cavità imbutiformi maggiori.

Un'arcata di roccia alta una quindicina di metri e larga circa 25 immette in un'enorme caverna (vedi fig. 3 della tav. annessa), dove la volta s'innalza ancor più. A sinistra scorre l'acqua fredda e silenziosa del Negro, che con un salto presso la chiusa, sotto la passerella in cemento, precipita

nella valle stretta sottostante a raggiungere il Tanagro. A destra vi è un passaggio largo 10 m. circa, in fondo al quale, presso l'edicola di S. Michele, è ormeggiato un barcone in ferro con cui si penetra lentamente nell'interno delle caverne.

Le pareti non presentano stratificazioni evidenti; il colore prevalente della roccia è il bianco-roseo, talvolta giallognolo per ossido di ferro idrato, talvolta verdastro per innumerevoli muschi. Dalla volta pendono in festoni cespi di edere, rovi, ciuffi di capelvenere, mentre numerosi colombi si annidano negli anfratti più alti della volta; ma della flora e della fauna attuale

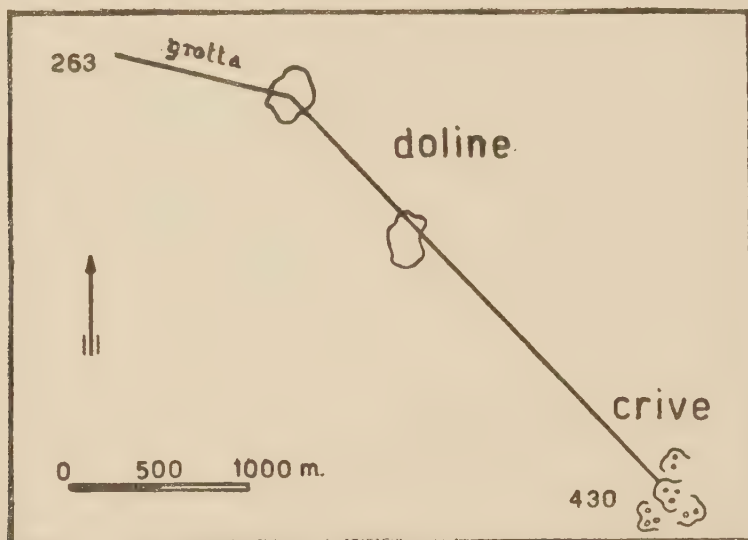



Fig. 4. — Asse della frattura che unisce la Grotta alle crive di Polla.

e fossile della grotta non mi occuperò, rimandando il lettore agli studi di Regalia, De Gasparis, Carucci, Patroni, Leonardi.

Andando avanti nella Grotta con un leggero gomito a sinistra notiamo che le pareti mostrano i segni di una violenta prolungata erosione subìta in passato, con la caratteristica disposizione della roccia erosa in lame e spuntoni smussati paralleli al decorso della corrente.

Il canale si restringe leggermente (vedi pianta alla pag. seguente) e dopo 100 m. circa presenta a sinistra un'apertura, a 6 m. dal pelo dell'acqua, inaccessibile da questa parte per la pendenza della parete e per l'enorme quantità del guano accumulato, apertura che immette alla grotta detta «dei pipistrelli» cui si perverrà per altra via. Poco dopo si approda alla passerella in cemento, da cui ci addentriamo per i diversi corridoi e cunicoli nell'interno della Grotta. A destra spumeggia una cascata prodotta dal salto che l'acqua compie giungendo dalle remote sorgenti della Grotta, a

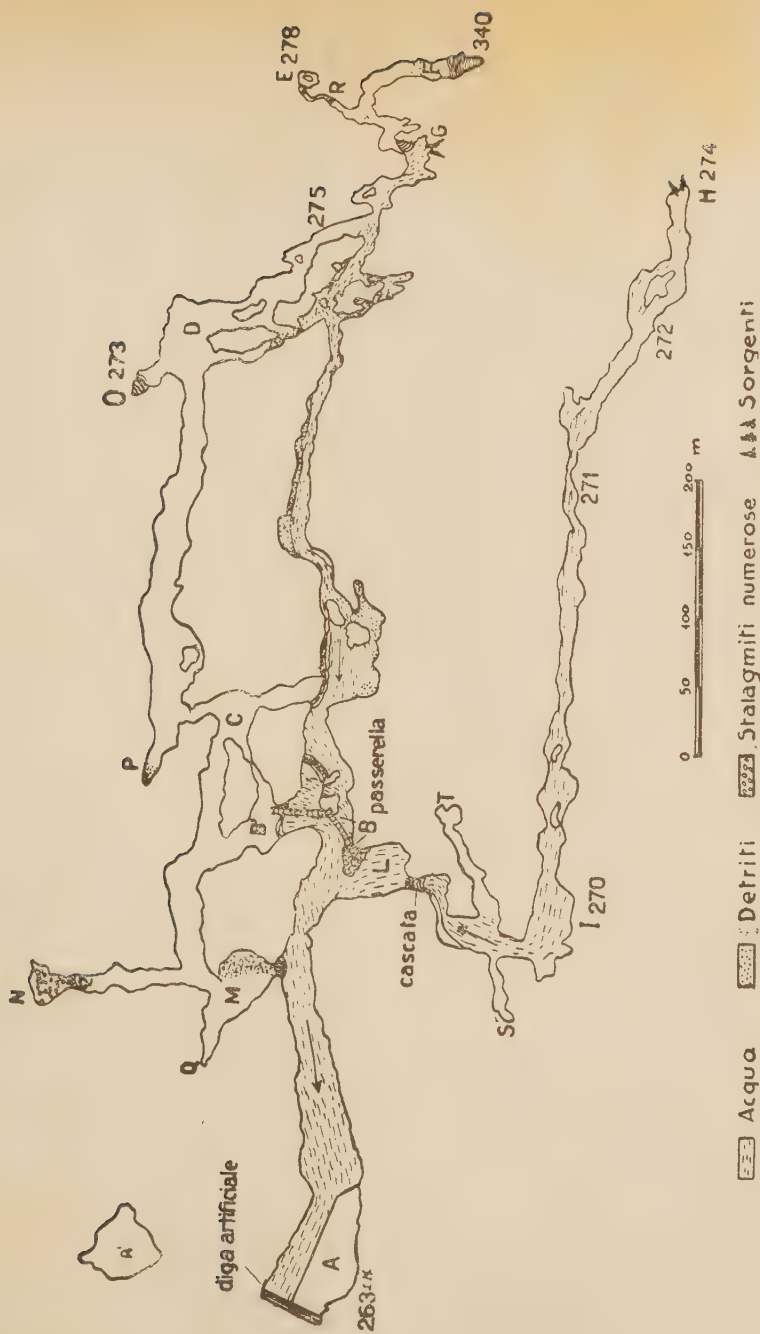



Fig. 5. — Pianta della Grotta di Pertosa.

sinistra si prosegue sulla passerella e, seguendo l'illuminazione, si volta ancora a destra, lasciando sulla sinistra un corridoio stretto con le pareti e la volta rivestite di innumerevoli stalattiti e stalagmiti che porta alla grotta « dei pipistrelli ».

Proseguendo verso la caverna *C* s'incontra sulla destra un'interessante sistema stalatto-stalagmitico, che risulta di una delicata cortina che, se percossa, dà diversi suoni (vedi fig. 3 della tav. annessa).

Imboccando il lungo ed altissimo corridoio principale che porta alla caverna *D*, l'ultima che al comune visitatore è data di vedere, s'incontrano delle bellissime formazioni concrezionarie, cui la fantasia popolare ha dato dei nomi caratteristici: la sala del trono, la caverna dei diamanti, la Madonnina, il Presepe, la nave ecc. Oltrepassate a sinistra due splendide colonne stalattitiche alte 4 m. e di circa 50 cm. di diametro, si giunge alla vasta grotta *D*, alta 30 m. circa, larga 30×35 m. La volta presenta delle formazioni da cui pendono delle grandi stalattiti. A sinistra la caverna presenta un cunicolo cieco, in salita, l'*O* della pianta, che termina in una piccola piattaforma colma di acqua stillata e disposta in pozzette delimitate da bordi di calcare concrezionato alti 2-3 cm. La formazione di questi bordi a me sembra sia dovuta al fatto che ogni goccia, cadendo nella pozzetta produce delle onde concentriche per cui la soluzione in essa contenuta giunge per inerzia alla periferia del punto in cui è caduta, dove precipita formando i muretti di concrezione calcarea.

Sulla parete destra la grande caverna presenta l'imbocco di due corridoi; divisa da un'alta barriera di grossi massi franati, che in alto lascia aperta una stretta comunicazione, la Grotta comunica con uno di essi, mentre all'altro più largo facilmente si accede essendo il naturale proseguimento della caverna stessa. Le pareti di questa caverna presentano nettissime stratificazioni che seguono l'andamento stratigrafico fuori notato. Fino a questa caverna giunge l'illuminazione elettrica.

Continuando ora per il corridoio che parte dalla sala *D*, tenendosi a sinistra dalla parte ove esso si restringe, si scende una ripida scarpata di 4 m., prodotta dall'ammasso di una frana sdrucciolevole per l'argilla umida, e si prosegue quasi in piano per un cammino ingombro di massi crollati sotto una volta bassa che spesso costringe a camminare carponi fin quando s'incontrano due sorgenti non distanti l'una dall'altra, nella caverna *G* della pianta, che zampillano saltellando fra uno strato e l'altro della roccia. La loro acqua forma un rivo sottile, suscettibile di variazioni stagionali, che affluisce al fiume principale nei pressi della passerella *D*, dove giunge attraverso un cunicolo lungo circa 600 m., che ho potuto completamente esplorare in periodo di magra.

Dalla caverna delle sorgenti per un tortuoso corridoio piuttosto breve e comodo si giunge nella caverna *R* e quindi con una svolta alla *F*, il fondo della quale è ingombro per una vastissima frana. Per quanto abbia cercato,

non sono riuscito a trovare qui alcuna entrata di ulteriori cunicoli, per quanto sia certo, anche secondo l'opinione di FANO [8]), che essa sia in diretta comunicazione con la prima dolina.

Mi fermerò ora a considerare la grotta *R* e la *E* che ad essa si unisce, le quali presentano un particolare interesse.

La *R* è una caverna non grande, alta una decina di metri, a cui si accede risalendo un gradino alto 150 cm. dal suolo su cui si appoggia il fondo della grotta; al centro del gradino si nota una depressione di 200 cm. circa, come una vasca. Se si osserva la parete di fronte, proprio sopra la vasca si vedranno tracce di una caduta di acqua; la vasca è quindi il bacino di raccolta di una cascata e in periodi immediatamente successivi alle piogge è piena d'acqua.

Il fatto più notevole ed attraente però è, che il pavimento del gradino, il fondo della grotta, della vasca e, fino ad una certa altezza, le pareti stesse della Grotta (v. fig. 4 della tav. annessa) sono completamente ricoperte da bellissimi cristalli di calcite che segnano nettamente il posto occupato dall'acqua, e chiarissima è la provenienza di questa, dato che la traccia di caduta d'acqua di cui ho detto prima, a 6 m. circa dal fondo della depressione centrale, è costituita anch'essa da cristalli di calcite.

Risalendo ora lungo la strettissima apertura da cui in periodi determinati cade l'acqua, percorrendo quindi il corso d'acqua a ritroso, per un cunicolo tortuoso che in alcuni puntl non è più largo di 60 cm. nè più alto di 80, si giunge alla caverna *E*. Il fondo del cunicolo è completamente ricoperto di cristalli di calcite, e così le pareti fino ad un certo livello.

Questa piccola caverna *E* presenta una depressione al centro, piena di acqua il cui livello raggiunge forse un metro, e sulla volta presenta parecchie cavità, di cui due più notevoli a forma di camino. La caverna è alta circa 3 m.

È notevolissimo il fatto che le pareti della Grotta presentano concrezioni simili a quelle riscontrate nella *R* e nel cunicolo, ma di un color giallo dovuto ad infiltrazione di argilla rosso-giallognola che ha talmente permeato la soluzione di carbonato di calcio da formare delle vere e proprie stalagmiti di argilla, lucide di umido ma facilmente spappolabili, e stalattiti dure come le comune stalattiti ma di colore giallo. La cosidetta « argilla » non è in realtà che terra rossa proveniente dal disfacimento del calcare.

Le pareti di questa caverna presentano qua e là accenni di fitta stratificazione, resi irriconoscibili per le tracce numerosissime di erosioni che la roccia presenta. Consideriamo ora queste due caverne con l'aiuto della figura 6: la quota minima della *R* è di poco meno di m. 275 sul livello del mare; per giungere alla *E*, che è a quota 278, si toccano i 279 e i 280 metri, tra cui è compresa un'altra piccolissima depressione piena fino ad un certo livello di cristalli deposti sulle pareti. La *E* è in comunicazione più o meno diretta con l'esterno e forse con la dolina più profonda; a

questa conclusione son giunto per la seguente ragione: un fuoco nel suo interno si accende immediatamente con ottimo tiraggio e il fumo sale subito per i camini della volta; inoltre in questa grotta ho trovato « sotto i camini » del materiale di trasporto che all'analisi è risultato di origine organica probabilmente vegetale. La E è dunque un serbatoio di raccolta delle acque che attraverso il cunicolo vengono convogliate nella R, da dove si dirigono nell'interno della Grotta. La cristallizzazione completa nelle due caverne e nel cunicolo è dovuta nettamente a deposizione e segna con una precisione che non dà adito a dubbi il livello occupato dall'acqua.

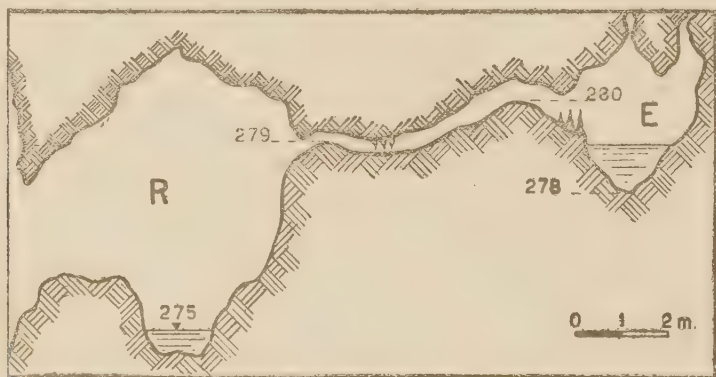



Fig. 6. — Profilo delle grotte R e E. Il cunicolo che le unisce descrive alcune curve, come risulta dalla pianta, per cui qui il suo percorso rispettando le quote è solo approssimativo.

Il sistema tutto costituisce un sifone per cui l'acqua passa dalla E alla R soltanto quando la prima è colma fino alla quota 280. Per questa ragione la E non si vuota mai completamente; una volta smesso l'afflusso dall'alto ed il relativo efflusso, l'acqua residua subisce una lentissima evaporazione deponendo il rivestimento di cristalli. Identico fenomeno avviene in tutte le buche incontrate nel lungo cunicolo e nella grotta R dove l'acqua ha subìto lo stesso processo di evaporazione.

A giudicare dall'erosione subìta dalle pareti del cunicolo, l'acqua contenuta e deflussa, sebbene a getto intermittente, deve esser stata notevole e tuttora, dopo grandi piogge, la R si riempie fino ad un certo livello di acqua filtrata.

Quanto alla quantità di terra rossa riscontrata nella E ed ai residui organici dovuti probabilmente a minuti frammenti di piante fluitati, essi si spiegano facilmente se si osserva che la caverna è tagliata in un calcare facilmente erodibile, che permette la presenza di meati larghi abbastanza da consentire il passaggio di una notevole quantità d'acqua. È ovvio che, occorrendo un certo tempo per colmarsi fino al limite necessario per il

deflusso verso la *R*, la terra rossa e i residui organici abbiano il tempo di precipitare al fondo e sulle pareti della *E*, di modo che l'acqua defluente ne sia quasi totalmente esente.

In ogni modo, per la molta terra rossa, per lo scarso numero di stalagmiti, e per il quasi totale disfacimento della roccia dovuto alla soluzione parziale, è chiaro che l'acqua rimane a lungo in questa caverna.

Tornando ora alle due sorgenti, seguiamo il decorso dell'acqua da esse scaturita, che dirigendosi direttamente ad Ovest giunge alla passerella, donde, congiungendosi all'acqua della cascata, esce all'esterno.

Il fondo del corso d'acqua è costituito da sabbia e ciottoli che qua e là emergono in sottili conoidi su cui è possibile procedere. La profondità del corso è molto variabile: massima presso la passerella *(B)*, minima presso il gomito che forma alla metà circa del suo percorso.

Mentre questo primo corso d'acqua può essere osservato percorrendolo secondo corrente, l'altro corso, quello della cascata, deve essere risalito, dato che le sue sorgenti, nel punto *H*, non hanno alcun passaggio che le unisca con altre caverne. Superato quindi il dislivello del salto, a cui si accede con la barca, dislivello oltremodo sdrucciolevole, si può faticosamente proseguire, ora a destra, ora a sinistra del corso d'acqua, più rapido dell'altro: presto si giunge ad un'ampia caverna con due bracci quasi asciutti a fondo cieco, a destra e a sinistra, a cui ne segue un'altra più vasta ancora, che descrivendo una curva ad angolo retto verso ESE immette in un corridoio più stretto, decorrente in senso parallelo al corso d'acqua prima considerato, che ci condurrà ad un ammasso detritico da cui scaturisce una sorgente di una portata leggermente superiore alle precedenti.

Questo ammasso detritico in pendio appartiene allo stesso sistema della frana *F*, e tra *F* ed *H*, secondo gli studi di G. Fano, dovrebbe incunearsi la 1.ª dolina: ipotesi giustissima, che non può essere confutata.

Resta ora da considerare un'ultima caverna, e cioè la grotta « dei pipistrelli », formata dall'insieme della *M* ed *N*. La via più facile di accesso è dal corridoio *B'*. Immediatamente dopo la passerella, voltando verso Ovest, si giunge nella *M*, vasta caverna, molto alta, grande circa come la *D*, ma molto meno attraente perchè ingombra da un altissimo strato di guano accumulato da migliaia di grossi pipistrelli che si scorgono pendenti a grappoli dalla volta e svolazzano in silenzio quando il fascio luminoso della lampada interrompe il loro sonno. A Sud la caverna si restringe in una arcata che con un salto di qualche metro dà sul corso d'acqua principale; ad Ovest presenta un corridoio che termina a fondo cieco, e a N, appena usciti dal suo ingresso, ci troviamo innanzi ad un cunicolo che per le molte stalattiti pendenti ci costringe a camminare carponi.

Questo cunicolo è stato tagliato nella terra rossa, su cui poggiano bellissime stalagmiti colonnari che sembrano sostenere la volta e che accompagnano il corridoio fino alla ultima grotta, la *N*, dove esistono i più grossi

campioni di gruppi stalagmitici che ci sia dato da osservare nella Grotta di Pertosa.

La *N* è piuttosto vasta, per quanto possa sembrare ristretta per la presenza delle molto numerose concrezioni, ed è molto interessante per una frattura da me riscontrata e studiata, che interessa tutta la sua parete Nord.

Il formarsi di questa frattura ha interessato il sistema concrezionare non solo di questa caverna, ma anche della cosidetta « Grotticella » che si apre ad una dozzina di metri sotto l' ingresso principale della Grotta di Pertosa, presso la base della diga in cemento, sul fianco del monte, senza diretta rispondenza col sistema di caverna principale. Nella caverna *N*, la frattura ci si presenta beante, lunga quanto la parete terminale, larga dai 10-15 ai 2-3 cm., qua e là risaldata da sottili concrezioni allo stadio iniziale.

La prima rottura è avvenuta in una stalatto-stalagmite immediatamente avanti e sotto la frattura principale, con uno spostamento medio di 8 cm. senza risaldatura; e la seconda con un distacco risaldato in una colonna.

Nella « Grotticella » poi a circa 15 metri più in basso della *N* mostra chiaramente una linea bianca della risaldatura avvenuta.

Ora, la frattura che si riscontra in queste due caverne, con spostamento medio dall' alto verso il basso di 7 cm. ed in senso orizzontale di cm. $4\,^1/_2$, mi sembra dovuta ad uno scoscendimento generale ed improvviso del terreno, con andamento approssimativo NNE-SSO, che, per aver interessato due caverne a circa 15 metri di dislivello e 100 di distanza, deve essere stato notevole. Qualunque possa esserne la causa, il cedimento deve essere stato improvviso, perchè nettissima è la superficie di distacco. Non esiterei ad attribuire il cedimento allo sprofondamento parziale di una cavità sottoposta, tra la « Grotticella » e la *N*.

Napoli, Istituto di Geologia della R. Università, maggio 1940 - XVIII.

Fig. 1. — « Cortina Litofonica ».

Fig. 2. — Cascata di Maremanico.

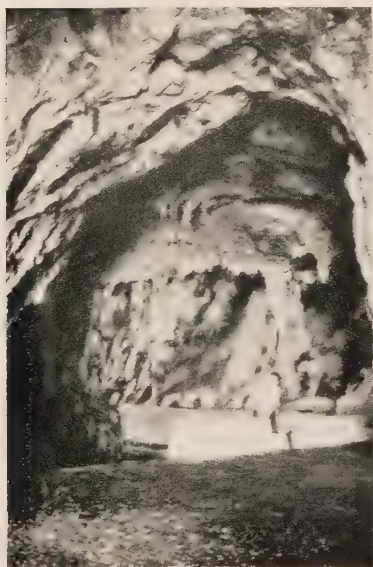



Fig. 3. — Ingresso della Grotta.

Fig. 4. — Delimitazione netta tra la cristallizzazione e la roccia viva nel bacino di raccolta.

BIBLIOGRAFIA

[1]) Alberti L., *Descrizione di tutta Italia.* Venetia, 1551.

[2]) Battaglia R., *Appunti di Speleologia del Cilento e della Lucania.* Le Grotte d'Italia. III, 1929, p. 48.

[3]) Carucci P., *La Grotta preistorica di Pertosa.* Di Gennaro & Morano. Napoli. 1907.

[4]) Curci-Rubertini, *Storia della Lucania.*

[5]) De Lorenzo G., *Reliquie di grandi laghi pleistocenici nell' Italia meridionale.* Atti R. Acc. Sc. Fis. e Mat., Vol. IX, Serie 2ª, N. 6. Napoli, 1897.

[6]) De Lorenzo G., *Geografia Fisica e Geologia in Leonardo da Vinci.* Annali dei LL. PP. Vol. XVII, Fasc. 3. Roma, 1939.

[7]) De Lorenzo G., *Studi di geologia nell' Appennino meridionale.* Atti della R. Acc. Sc. Napoli, s. 2ª, vol. VIII, 1896.

[8]) Fano F., *Impianti sui fiumi Tanagro e Aventino.* L' Elettrotecnica, 25-11 e 5-15 III, 1923.

[9]) Ferrario F., *Lexicon geographicum.*

[10]) Leonardi P., *Contributo ecc.* Archivio Antr. ed Etnol., Vol. LXIII, Fasc. 3°-4°, 1934.

[11]) Mannelli, *Lucania sconosciuta.* Manoscritto Museo Naz. Napoli.

[12]) Martel, *Applications géologiques de la spéléologie.* Annales des Mines, 9.e Série, X, p. 1-100, pl. I-III, 1896.

[13]) Patroni G., *Caverna naturale con avanzi preistorici in provincia di Salerno.* Mon. Antichi (R. Acc. Lincei) IX, 1899, Roma.

[14]) Parpagliolo L., *Le Grotte di Pertosa.* Le Vie d' Italia, 1927, pp. 1300-10.

[15]) Regalia E., *Fauna della G. d. P.* Arch. Antrop. ed Etnol., XXX, Firenze, 1900, e XXXVI, 1°, 1906.

[16]) Trotta M., *La Grotta di Pertosa.* Le Grotte d' Italia, 1931.

Calcolo di travi munite di appoggi elastici di notevole estensione

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio ord.* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 1 giugno 1940 - XVIII)

Sunto. — Si considera anzitutto il caso di una trave che corre su lunghi appoggi, costituiti da pilastri reagenti punto per punto in proporzione degli abbassamenti che vi si verificano. Si studia poi il caso più complesso di strutture solidali di cui la secondaria risenta, per effetto di lunghi appoggi sulle principali, riguardate come piastre poggiate su due lati, reazioni proporzionali agli abbassamenti, con coefficienti di proporzionalità variabili. Si indica infine un metodo di prima approssimazione per risolvere rapidamente il problema.

1. Un pilastro, la cui sezione p. es. rettangolare abbia un lato AB di notevole lunghezza, serva di appoggio ad una trave che, correndovi sopra nella direzione del lato lungo, termini poi, alle sue estremità, ad appoggi semplici o dello stesso tipo ora indicato, o corra continua su parecchi di essi; si supponga che il pilastro sia costituito di materiale elastico, capace di reagire in proporzione delle deformazioni che esso subisce.

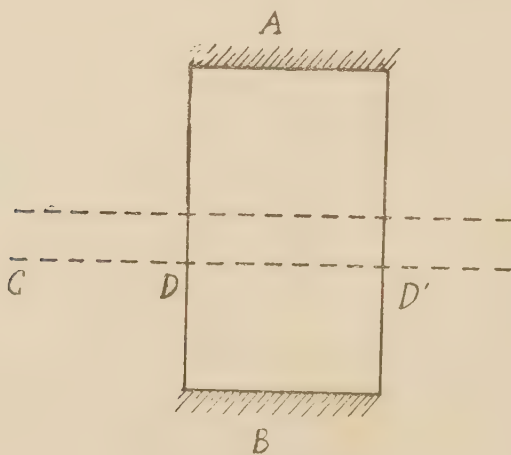



Fig. 1.

Ovvero, facendo un' altra ipotesi, si abbia una trave AB, di notevole larghezza, appoggiata agli estremi; su di essa, in direzione normale, poggi un' altra trave CDD'. Tale seconda trave potrà avere su AB un appoggio

di estremità, ovvero un appoggio intermedio, correre cioè continua su AB; gli altri appoggi della stessa CD (di estremità o eventualmente anch'essi intermedi) potranno essere semplici (rigidi o non) o della stessa natura di AB.

Si consideri ancora un'altro caso: si supponga che esistano quattro travi come AB costituenti con i loro assi un quadrato o un rettangolo, e nell'interno di questo una piastra P che poggi al contorno sulle AB, ed eventualmente prosegua continua oltre di esse.

Se le due strutture descritte per ultimo fossero di cemento armato, anzicchè aversi appoggio di una trave sull'altra, si avrebbe solidarietà tra le diverse parti sopra descritte, tra le quali potrebbe però sempre distinguersi una struttura secondaria, del tipo CDD' o P e una struttura principale, del tipo AB.

Ciò che caratterizza la struttura in esame e che la rende, a nostro avviso, degna di particolare considerazione è che, per la notevole larghezza della struttura AB, non può pensarsi che le reazioni da essa esercitate sulla struttura secondaria siano concentrate in un punto o lungo una linea, asse o spigolo esterno di AB, come abitualmente si presume quando AB è una trave di piccola larghezza.

Bisogna piuttosto ritenere che la struttura secondaria trasmetta ad essa AB il carico che sopporta, e la AB stessa reagisca diversamente da punto a punto della linea o della superficie comune alle due strutture. Oggetto del presente studio è appunto determinare con opportuni criteri di approssimazione la legge secondo cui si distribuisce tale reazione, soprattutto nei riguardi dell'influenza della distribuzione stessa sulla struttura secondaria ed in relazione all'effetto maggiore o minore della continuità fra le stesse strutture secondarie. Il problema ha interesse pratico in molti casi, come sarà esemplificato in seguito.

Accenneremo anzitutto rapidamente al caso nominato per primo (trave con estesi appoggi su pilastri), che si presenta semplice e può anche servire di introduzione ai seguenti, che tratteremo di proposito, essendo quelli sui quali vogliamo particolarmente fissare la nostra attenzione.

2. Per risolvere il problema della trave che corre su estesi appoggi costituiti da pilastri non collegati ad essa e che possono ritenersi elastici, basta considerare che lungo l'appoggio le reazioni che il pilastro trasmette punto per punto alla trave sono da ritenersi, almeno in via di sufficiente approssimazione, proporzionali agli abbassamenti che nei punti stessi si verificano.

Può darsi il caso che l'appoggio sia bilaterale o non: nel primo caso l'esistenza di reazioni dirette dall'alto al basso può ammettersi, nel secondo no.

La relazione che risolve il problema è in ogni caso la:

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = -Cy = p \qquad [1]$$

essendo C una costante di proporzionalità il cui significato si ricava dalla precedente facendo $y=1$, e che dipende dal materiale di cui è costituito il pilastro.

Ponendo:

$$\alpha^4 = \frac{p}{4EI}$$

la [1] dà luogo alle seguenti:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \alpha^3 \Big[-c_1 e^{\alpha x}\{\cos(\alpha x)+\operatorname{sen}(\alpha x)\} + c_2 e^{-\alpha x}\{\cos(\alpha x)-\operatorname{sen}(\alpha x)\} + \\ + c_3 e^{\alpha x}\{\cos(\alpha x)-\operatorname{sen}(\alpha x)\} + c_4\{\cos(\alpha x)+\operatorname{sen}(\alpha x)\}\Big]$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2\Big[-c_1 e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\alpha x) + c_2 e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\alpha x) + c_3 e^{\alpha x}\cos(\alpha x) - c_4 e^{-\alpha x}\cos(\alpha x)\Big]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha}{2}\Big[c_1 e^{\alpha}\{\cos(\alpha x)-\operatorname{sen}(\alpha x)\} - c_2 e^{-\alpha x}\{\cos(\alpha x)+\operatorname{sen}(\alpha x)\} + \\ + c_3 e^{\alpha x}\{\cos(\alpha x)+\operatorname{sen}(\alpha x)\} + c_4 e^{-\alpha x}\{\cos(\alpha x)-\operatorname{sen}(\alpha x)\}\Big]$$

$$y = \frac{1}{2}\Big[c_1 e^{\alpha x}\cos(\alpha x) + c_2 e^{-\alpha x}\cos(\alpha x) + c_3 e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\alpha x) + c_4 e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\alpha x)\Big].$$

Se l'appoggio è bilaterale la [1] vale per tutta la sua lunghezza altrimenti essa può esser valevole solo in tratti distinti (in generale il più prossimo allo spigolo interno o i più prossimi agli spigoli) potendosi altrove verificare un innalzamento della trave. Le costanti c_i vanno perciò determinate, in relazione alle condizioni del caso, sui bordi del pilastro o dei diversi tratti.

Per fissare le idee, supponiamo che la trave abbia due appoggi semplici di estremità e uno centrale, esteso, del tipo che stiamo considerando, bilaterale; e che sia caricata uniformemente sulla sola prima campata AB.

Le relazioni per i bordi si hanno eguagliando su di essi le inclinazioni della trave nei due tratti, libero ed appoggiato.

Riferendoci alla fig. 2, la rotazione nel punto B considerato come appartenente al tratto AB, espressa in funzione del momento che si verifica

nella trave appoggiata e di quello di incastro M_B è:

$$\frac{M_B l_1}{3EI} + \frac{p l_1^3}{24EI}.$$

Per avere invece la rotazione in B come appartenente al tratto BC espressa in funzione dei momenti, occorrerà prima esprimere le c_i in funzione dei momenti stessi. Le equazioni che ci permettono tale risoluzione

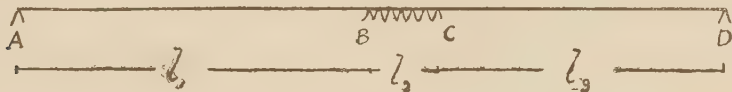



Fig. 2.

si hanno subito considerando che, se si pone in B l'origine delle coordinate, si ha:

$$\text{per } x = 0 \qquad T = T_B \qquad M = M_B$$
$$\text{per } x = l_2 \qquad T = T_C \qquad M = M_C.$$

Poi è:

$$T_B = \frac{m_B}{l_1} + \frac{M_B}{l_1} - R$$
$$T_C = -\frac{M_C}{l_3}$$

dove m_B e R sono rispettivamente il momento statico delle forze esterne rispetto all'appoggio B e la risultante delle forze esterne, sempre agenti sulla campata AB.

Si ha allora:

$$-\frac{T_B}{\alpha^3 EI} = -c_1 + c_2 + c_3 + c_4$$
$$-\frac{M_B}{\alpha^2 EI} = c_3 - c_4$$

cioè:

$$c_4 = c_3 + \frac{M_B}{\alpha^2 EI} \qquad c_2 = c_1 - 2c_3 - \frac{M_B}{\alpha^2 EI} - \frac{T_B}{\alpha^3 EI}$$

e poi

$$\frac{T_c}{\alpha^3 EI} = -c_1 e^{\alpha l_2}\left[\cos(\alpha l_2)+\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right] + c_1 e^{-\alpha l_2}\left[\cos(\alpha l_2)-\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right] -$$

$$-2c_3 e^{-\alpha l_2}\left[\cos(\alpha l_2)-\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right] - \left(\frac{M_B}{\alpha^2 EI}+\frac{T_B}{\alpha^3 EI}\right)e^{-\alpha l_2}\left[\cos(\alpha l_2-\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right]$$

$$+c_3 e^{\alpha l_2}\left[\cos(\alpha l_2)-\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right] + c_3 e^{-\alpha l_2}\left[\cos(\alpha l_2)+\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right] +$$

$$+\frac{M_B}{\alpha^2 EI}e^{-\alpha l_2}\left[\cos(\alpha l_2)+\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right]$$

$$\frac{M_c}{\alpha^2 EI} = -c_1 \operatorname{sen}\alpha l_2 (e^{\alpha l_2}-e^{-\alpha l_2}) - c_3\left[e^{-\alpha l_2}\left\{2\operatorname{sen}(\alpha l_2)+\cos(\alpha l_2)\right\} - e^{\alpha l_2}\cos\alpha l_2\right] -$$

$$-e^{-\alpha l_2}\left[\left(\frac{M_B}{\alpha^2 EI}+\frac{m_B}{\alpha^3 l_1 EI}-\frac{R}{\alpha^3 EI}+\frac{M_B}{\alpha^3 l_1 EI}\right)\operatorname{sen}(\alpha l_2)+\frac{M_B}{\alpha^2 EI}\cos(\alpha l_2)\right]$$

e si determinano così le c_i. Dopo di che si può scrivere, eguagliando le rotazioni in B e in C rispettivamente:

$$-\frac{M_B l_1}{3}-\frac{p l_1^3}{24}=\frac{1}{2\alpha}(c_1-c_2+c_3-c_4)$$

$$-\frac{M_c l_3}{3}=\frac{1}{2\alpha}\left[c_1 e^{\alpha l_2}\left\{\cos(\alpha l_2)-\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right\} - c_2 e^{-\alpha l_2}\left\{\cos(\alpha l_2)+\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right\} +\right.$$

$$\left.+c_3 e^{\alpha l_2}\left\{(\cos\alpha l_2)+\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right\} + c_4 e^{-\alpha l_2}\left\{\cos(\alpha l_2)-\operatorname{sen}(\alpha l_2)\right\}\right].$$

Per renderci subito conto dell'importanza dell'effetto del tipo di appoggio ora studiato, facciamo un esempio numerico.

Esempio numerico.

Poniamo: $l_1 = l_3 =$ cm. 500

$$p = 2000 \text{ Kg / ml}; \qquad I = \frac{1}{12}\,30.60^3 = 540.000 \text{ cm}^4$$

e supponiamo $E = 50{\cdot}000$ Kg / cmq
$C = 100.$

Si determinano anzitutto le costanti c_i, le quali, se si pone $A = \alpha^2 EI$, risultano:

$$\begin{aligned}
Ac_1 &= -0{,}084\ M_2 - 0{,}225\ M_3 + 23232\\
Ac_2 &= -1{,}781\ M_2 - 1{,}591\ M_3 + 546592\\
Ac_3 &= 0{,}271\ M_2 - 0{,}683\ M_3 - 67930\\
Ac_4 &= 1{,}271\ M_2 - 0{,}683\ M_3 - 67930
\end{aligned}$$

e per conseguenza, risolvendo le due equazioni sopra scritte, esprimenti l'eguaglianza delle rotazioni tra le campate agli estremi dell'appoggio centrale risulta:

$$M_2 = -316.000 \text{ Kg cm}$$

$$M_3 = -110.000 \text{ Kg cm.}$$

Da tale esempio si rilevano due punti principali:

1) che il valore del momento flettente lungo l'appoggio va diminuendo rapidamente (nell'esempio si riduce, da un estremo all'altro, a $^1/_3 \sim$) e quindi che il carico esistente su una sola campata produce sulla campata adiacente effetto molto ridotto, già col rapporto, certo non eccezionale, tra la lunghezza dell'appoggio e quello della campata, sopra adottato, cioè $^1/_5$;

2) che il valore del momento flettente nella sezione comune all'appoggio e alla campata è diverso da quello ottenibile con metodi approssimati.

Tali risultati, non ottenibili con gli ordinari metodi di calcolo, mostrano come sia opportuno il procedimento sopra esposto.

3. Passiamo ora alla trattazione del caso più complesso ed interessante. Per sviluppare il nostro studio occorre precisare il modo di resistere e reagire della struttura principale.

Da tale punto di vista essa deve ritenersi una piastra: due lati opposti sono appoggiati (o diversamente vincolati, come vedremo in seguito), gli altri due sono o uno libero e l'altro solidale alla struttura secondaria o tutt'e due solidali a strutture secondarie. Tali condizioni determineranno, com'è ovvio, le condizioni al contorno.

Per quanto riguarda il carico, esso è variabile da punto a punto ed è determinato dal fatto che in ogni punto dipende dall'abbassamento che nel punto stesso della struttura principale si verifica. Il rapporto tra lo abbassamento e il carico non è però costante, ma varia invece, come facilmente si intuisce, con le coordinate del punto in esame. Basta infatti riflettere che un carico concentrato agente su una trave produce freccia diversa sotto di esso, secondo la distanza del carico stesso dagli estremi della trave; e viceversa che a determinata freccia corrisponde un carico diverso (supposto agente nel punto in cui si misura la freccia) seconda la distanza di detto punto dagli estremi della trave. Analogo è, evidentemente, in proposito, il comportamento delle piastre, nelle quali interviene la considerazione anche dell'altra dimensione.

È opportuno quindi anzitutto tener presenti i principali risultati della teoria delle piastre. L'equazione fondamentale, che lega la deformazione al carico è:

$$\frac{E\,I}{1-\eta^2}\,\Delta_4 \mathrm{w} = f(x\,,y) \qquad [2]$$

dove $f(x\,,y)$ rappresenta il carico. Le espressioni:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} + \eta\,\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2}\right) \qquad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} + \eta\,\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = D\,(1-\eta)\,\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x \partial y}$$

$$T_x = D\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right); \qquad T_y = -D\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

rappresentano in generale, ordinatamente, i valori dei momenti flettenti, del momento torcente e degli sforzi di taglio nei piani normali a x e a y, e $D = -\dfrac{E\,I}{(1-\eta^2)}$.

Riferiamo ora la nostra piastra AB (v. fig. 1) ad un sistema di assi $O\,(x\,,y)$ così determinato: sia l'origine O il punto medio del lato A, l'asse y la congiungente i punti medi dei lati A e B, positivi verso B, l'asse x normale al precedente, positivo verso destra.

L'equazione fondamentale [1] diviene nel nostro caso, per quanto finora detto:

$$\frac{E\,I}{1-\eta^2}\,\Delta_4 \mathrm{w} = -C\,\mathrm{w} \qquad [3]$$

dove C rappresenta evidentemente il carico che si produce per un abbassamento eguale a uno.

Le condizioni al contorno per la w risultano poi:

per $y=0$ e $y=b$

$$\mathrm{w}=0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial y^2} + \eta\,\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial x^2} = 0$$

dato che lungo i lati appoggiati devono essere nulli gli abbassamenti e i momenti M_y. Le condizioni lungo i lati $x = \pm a$ dipenderanno invece dal vincolamento alle strutture secondarie.

Risolveremo il problema per gradi.

Consideriamo anzitutto la piastra caricata con un carico proporzionale, punto per punto, all'abbassamento, supponendo costante il rapporto di proporzionalità.

A tale scopo prendiamo in esame un'espressione di spostamento data da:

$$w = c_1(w_1 + w'_1) + c_2(w_2 + w'_2) + c_3(w_3 + w'_3) + c_4(w_4 + w'_4) \qquad [4]$$

in cui avendo posto $y' = b - y$, sia

$$w_1 = [(e^{\alpha y}+e^{-\alpha y})\mathrm{sen}(\alpha y')+(e^{\alpha y'}+e^{-\alpha y'})\mathrm{sen}(\alpha y)]e^{\beta x}\cos(\beta x) + \\ +[(e^{\alpha y}-e^{-\alpha y})\mathrm{sen}(\alpha y')+(e^{\alpha y'}-e^{-\alpha y'})\mathrm{sen}(\alpha y)]e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x) \equiv \\ \equiv f_1'(y)e^{\beta x}\cos(\beta x)+f_2'(y)e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x)$$

$$w_1' = -2\,\mathrm{sen}(\alpha b)e^{\beta x}\cos(\beta x)-(e^{\alpha b}-e^{-\alpha b})e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x)$$

$$w_2 = [(e^{\alpha y}+e^{-\alpha y})\mathrm{sen}(\alpha y')+(e^{\alpha y'}+e^{-\alpha y})\mathrm{sen}(\alpha y)]e^{-\beta x}\cos(\beta x) + \\ +[(e^{\alpha x}-e^{-\alpha y})\mathrm{sen}(\alpha y')+(e^{\alpha y'}-e^{-\alpha y'})\mathrm{sen}(\alpha y)]e^{-\beta x}\mathrm{sen}(\beta x) \equiv \\ \equiv f_1''(y)e^{\beta x}\cos(\beta x)+f_2''(y)e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x)$$

$$w_2' = -2\,\mathrm{sen}(\alpha b)e^{-\beta x}\cos(\beta x)-(e^{\alpha b}-e^{-\alpha b})e^{-\beta x}\mathrm{sen}(\beta x)$$

e w_3, w_3', w_4, w_4' siano analoghi ai precedenti con

$(e^{\alpha y}-e^{-\alpha y})$ e $(e^{\alpha y'}-e^{-\alpha y'})$ al posto di $(e^{\alpha y}+e^{-\alpha y})$ e $(e^{\alpha y'}+e^{-\alpha y'})$

rispettivamente, e viceversa.

Per w_1, si ha:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 2\beta^2[-f_1'(y)\,e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x) + f_2'(y)\,e^{\beta x}\cos(\beta x)]$$

$$\frac{\partial^2 w'_1}{\partial x^2} = -2\beta^2[-2\mathrm{sen}(\alpha b)\,e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x)-(e^{\alpha b}-e^{-\alpha b})\cos(\beta x)$$

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} = -4\beta^4[f_1'(y)\,e^{\beta x}\cos(\beta x) + f_2'(y)\,e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x)]$$

$$\frac{\partial^4 w'_1}{\partial x^4} = 4\beta^4[2\mathrm{sen}(\alpha b)\,e^{\beta x}\cos\beta x + (e^{\alpha b}-e^{-\alpha b})\,e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x)]$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = -2\alpha^2 e^{\beta x}\{[(e^{\alpha y}-e^{-\alpha y})\cos(\alpha y') + (e^{\alpha y'}-e^{-\alpha y'})\cos(\alpha y')]\cos\beta x - \\ -[(e^{\alpha y}+e^{-\alpha y})\mathrm{sen}(\alpha y) - (e^{\alpha y'}+e^{-\alpha y'})\mathrm{sen}(\alpha y)]\mathrm{sen}(\beta x)\}$$

$$\frac{\partial^2 w'_1}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} = -4\alpha^4 e^{\beta x}\{[(e^{\alpha y}+e^{-\alpha y})\mathrm{sen}(\alpha y) + (e^{\alpha y'}+e^{-\alpha y'})\mathrm{sen}(\alpha y)]\cos(\beta x) + \\ +[(e^{\alpha y}-e^{-\alpha y})\cos(\alpha y') + (e^{\alpha y'}-e^{-\alpha y'})\cos(\alpha y)]\mathrm{sen}(\beta x)\}$$

$$\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2\partial y^2} = 4\alpha^2\beta^2\{[(e^{\alpha y}-e^{-\alpha y})\cos(\alpha y') + (e^{\alpha y'}-e^{-\alpha y'})\cos(\alpha y)]\,e^{\beta x}\mathrm{sen}(\beta x) + \\ +[(e^{\alpha y}+e^{-\alpha y})\mathrm{sen}(\alpha y')+(e^{\alpha y'}+e^{-\alpha y'})\mathrm{sen}\,\alpha y]e^{\beta x}\cos(\beta x)\}.$$

Si ha allora:

$$\Delta_4 (w_1+w'_1) = -4\beta^4 w_1 - 4\beta^4 w'_1 + 8\alpha^2\beta^2 w_1 - 4\alpha^4 w_1 = -4 w_1(\alpha^4 - 2\alpha^2\beta^2 + \beta^4) - 4 w'_1$$

E se è:

$$\alpha^2 = 2\beta^2$$

si ha:

$$\Delta_4 (w_1 + w'_1) = -4\beta^4 (w_1 + w'_1).$$

E similmente si avrà per w_2 e w'_2, w_3 e w'_3, w_4 e w'_4: onde in definitiva:

$$\Delta_4 w = -4\beta^4 w.$$

Basterà quindi far sì che $4\beta^4 \frac{1-\eta^2}{EI}$ rappresenti il coefficiente di proporzionalità che deve intercorrere tra abbassamento e carico, perchè, con l'espressione del w da noi stabilita, sia soddisfatto il nostro assunto.

È opportuno notare poi che i termini w′ hanno il solo scopo di far sì che sia soddisfatta la condizione al contorno $w = 0$. Ma bisogna notare che se è soddisfatta la

$$w = 0 \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e } y = b$$

non lo è la

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e } y = b.$$

Per soddisfare anche tale condizione sovrapponiamo all'espressione della w sopra scritta quella di altri w_i per i quali sia

$$\Delta w_i = 0$$

cioè tali che ad essi corrisponda carico nullo, sia

$$w_i = 0 \quad \text{per } y = 0 \quad \text{e } y = b$$

e che, sempre per $y=0$ e $y=b$, diano un $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ opposto a quello dato dal w prima scritto. Ciò può ottenersi con una somma di w moltiplicati per costanti, che vengono appunto determinate con tale condizione.

Si prenda ad esempio una funzione di tipo analogo a quello che si

adotta per le piastre incastrate:

$$w'_0 = [(e^{ry'} - e^{-ry'})y + (e^{ry} - e^{-ry})\,y']\cos(rx) = \varphi(y)\cos(rx). \qquad [5]$$

Per essa si ha:

$$\frac{\partial^2 w'_0}{\partial x^2} = - r^2\varphi(y)\cos(rx)$$

$$\frac{\partial^4 w'_0}{\partial x^4} = r^4\varphi(y)\cos(rx)$$

$$\frac{\partial^2 w'_0}{\partial y^2} = r\,[ry\,(e^{ry'}-e^{-ry'})+ry'(e^{ry}-e^{-ry})-2(e^{ry'}+e^{-ry'})-2(e^{ry}+e^{-ry})]\cos(rx)$$

$$\frac{\partial^4 w'_0}{\partial y^4} = r^3[-4(e^{ry'}+e^{-ry'})-4(e^{ry}+e^{-ry})+ry(e^{ry'}-e^{-ry'})+ry'(e^{ry}-e^{-ry})]\cos(rx)$$

$$\frac{\partial^4 w'_0}{\partial x^2\partial y^2} = - r^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\cos(rx)$$

e risulta, com'è facile controllare:

$$\Delta_4\, w'_0 = 0.$$

Ad analoghi risultati si perviene per le espressioni:

$$w_0'' = [(e^{ry'} + e^{-ry'})\,y + (e^{ry} + e^{-ry})\,y']\cos(rx)$$
$$w_0''' = [(e^{ry'} - e^{-ry'})\,y' + (e^{ry} - e^{-ry})\,y']\,\text{sen}\,(rx)$$
$$w_0^{IV} = [(e^{ry'} + e^{-ry'})\,y + (e^{ry} - e^{-ry})\,y']\,\text{sen}\,(rx).$$

Onde se si fa:

$$w_0 = c_1 w'_0 + c_2 w_0'' + c_3 w_0''' + c_4 w_0^{IV}$$

risulta appunto:

$$\Delta_4 w_0 = 0 \qquad \text{e per } y = 0\ ,\ \ y = b\ ,\ \ w_0 = 0.$$

Poichè in tale espressione della w_0, r è arbitrario, potremo far assumere ad esso diversi valori, e considerare la

$$\sum_1^n c_r\, w_{0r}$$

prendendo per r tutti i valori interi da 1 a n. In tal modo si potrà ren-

dere nulla la

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

in cui al posto di w si pone $w = w + \sum_1^n c_r w_{0r}$ in tanti punti per quanto è il numero n.

Con ciò è risoluto il caso della piastra poggiata su due lati e caricata di un carico proporzionale all'abbassamento, che del resto è un problema già importante di per sè.

Occorrerebbe ora precisare come vengono soddisfatte le condizioni pei lati $x = \pm a$ ciò che influisce, evidentemente, anche sulla trattazione precedente: ma su ciò fermeremo la nostra attenzione di proposito trattando l caso più generale, che è quello che particolarmente ci interessa.

4. Nel caso più generale il problema si presenta diversamente, in quanto che, come abbiamo detto, il rapporto fra carico e abbassamento è variabile.

Per risolvere tale problema facciamo ora le seguenti ipotesi:

a) che il rapporto tra carico ed abbassamento vari soltanto con la y; dato il modo di vincolamento della piastra che è appoggiata lungo due lati paralleli all'asse x riteniamo che tale ipotesi sia ben giustificabile e dia luogo a risultati molto prossimi alla realtà. Con tale ipotesi si viene anche a precisare il valore del momento d'inerzia da introdurre nella [4] e nelle altre; esso è quello relativo alla sezione normale a y, maggiore notevolmente in generale (se si tiene conto, come si deve, dei ferri) di quello nella direzione normale a x;

b) che si possa suddividere la lunghezza l della piastra in tratti nei quali si possa supporre, con sufficiente esattezza agli effetti delle deformazioni, che siano costanti y e C, e ciò è legittimo, perchè la esattezza maggiore o minore di tale procedimento dipende dalla larghezza minore o maggiore della striscia. Inoltre l'ipotesi corrisponde anche ad una possibile situazione di fatto, che cioè la struttura secondaria, come si specificherà tra poco, possa essere costituita da travi di piccola larghezza, corrispondenti quindi ad una striscia;

c) che, per quanto riguarda il calcolo del coefficiente di proporzionalità non tenendo conto della variabilità secondo l'asse x, come sopra si è detto, si possa assimilare la piastra ad una trave con l'asse disposto parallelamente all'asse y.

Si farà quindi agire su tale trave, un carico di intensità nota (ad es. uguale a Kg/cmq. 1) distribuito uniformemente lungo la striscia, di piccola larghezza b, sopra considerata, e si calcolerà l'abbassamento che si produce nella trave detta, per effetto di tale carico, nella sezione in corrispondenza

all' asse della striscia. In altri termini, al valore variabile di C lungo x, si sostituisce un valor medio costante, per la determinazione del quale si trascura l' effetto della solidarietà con le strutture secondarie, valore che si ricava quindi in modo ovvio.

Riteniamo che il criterio approssimato ora esposto sia più che sufficiente per i casi pratici: comunque, tale ipotesi non è affatto necessaria per quanto andiamo a dire, perchè si può anche calcolare tale freccia quale effettivamente si produce in una piastra come sopra vincolata con due lati solidali a strutture secondarie e soggetta a un carico ripartito in una piccola zona; la trattazione può svolgersi seguendo il metodo classico di NAVIER; occorrerà soltanto alle condizioni di appoggio o di incastro sui lati $x = \pm a$ abituale in tale teoria, sostituire quella dell'eguaglianza dell'inclinazione $\frac{\partial w}{\partial y}$ tra struttura principale e secondaria. Ricordiamo al proposito che problemi di tal genere si risolvono trovando l'espressione del w, che soddisfa all'equazione generale $\Delta_4 w = f(x, y)$ e sovrapponendo ad esso una $\Sigma c_i w_i$ tali che ogni w dia $\Delta_4 w = 0$, mentre le costanti c_i servono a soddisfare in quanti punti si voglia la condizione che crediamo imporre. Per quanto riguarda, del resto, le condizioni sui lati $x = \pm a$, il procedimento è identico a quello che esporremo tra poco partitamente.

Tutto ciò premesso, potremo sempre ricondurci al caso che si abbia, nella piastra in esame, una striscia simmetrica rispetto ad y e y' caricata, e la rimanente superficie della piastra scarica. Difatti il diverso rapporto tra carico ed abbassamento comporta una diversità di carico tra le diverse strisce, onde è possibile sempre considerare carica una striscia e scariche le altre.

Il problema si riconduce quindi a quello di una piastra, sempre vincolata come sopra detto, caricata di un carico proporzionale all'abbassamento in una striscia soltanto di essa piastra, striscia parallela all'asse x e simmetrica rispetto ad y e y'.

Per tale striscia si potrà quindi scrivere un'espressione dello spostamento analoga alla [4] senza i termini w_i'; per le rimanenti parti si dovrà invece scrivere una espressione della w tale che risulti:

$$\Delta_4 w = 0$$

e che si abbia

$$\text{per } y = 0 \quad \text{ o per } y = b, \qquad w = 0 \qquad \text{e } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Espressioni di tale tipo possono facilmente trovarsi: assumiamo ad es. per la striscia sita tra quella centrale e l' asse x, la

$$w_r = c_r \operatorname{sen}(ry) \cos_r h\,(rx) \qquad [6]$$

con r numero intero; e similmente per l'altra simmetricamente disposta rispetto alla centrale:

$$w'_r = c'_r \operatorname{sen}(ry') \cos h\,(rx)$$

per le quali notoriamente è

$$\Delta_4 w_r = 0 \quad ; \quad \Delta_4 w'_r = 0.$$

Sono così soddisfatte le condizioni sui lati $y = 0$ e $y = b$, ma occorrerà ancora che sui bordi della striscia, cioè per $y = y_1$ e $y = y_2$ o $b - y = y_1$ le superficie deformate dei due tratti di piastra si raccordino, cioè si abbia lungo tali bordi lo stesso abbassamento w e la stessa inclinazione $\frac{\partial w}{\partial y}$.

Detta condizione si sostituisce a quella relativa ai lati $y = 0$ e $y = b$ del caso precedente.

Inoltre tali abbassamenti non rimangono senza effetto nel regime statico della piastra stessa e delle strutture secondarie: occorrerà quindi che ai bordi comuni alla piastra e alle strutture secondarie siano soddisfatte le condizioni di eguaglianza delle inclinazioni, come del resto per la striscia caricata, secondo quanto tra poco specificheremo.

Sarà anche ora necessario che la w contenga un certo numero di costanti arbitrarie in modo che si possano scrivere altrettante equazioni che comporteranno la soddisfazione delle condizioni in un numero di punti eguali a quelli delle costanti. Difatti basterà porre a tale scopo:

$$W = \sum_1^n c_r w_r$$

dove w_1 è la w_r sopra scritta [6]. Eguagliando allora spostamenti e inclinazioni in quanti si vogliono punti dei lati della striscia parallela all'asse x e inclinazioni in punti dei lati $x = \pm a$ si soddisfano le condizioni al contorno stesso nei medesimi punti. E poichè nelle espressioni delle w_r vi è simmetria in y e y', basta considerare uno solo dei lati paralleli a x, perchè siano soddisfatte le condizioni su tutti e due tali lati.

Va poi notato che le condizioni sui lati $x = \pm a$ potranno esser soddisfatte per pochi punti (e quindi con la corrispondente introduzione di poche equazioni) perchè è negli abituali procedimenti di calcolo di strutture del tipo in esame la suddivisione di esse in numero piccolo di strisce, pur quando si adottano metodi non sommari di calcolo, e si desidera quindi una buona approssimazione. Ciò del resto rimane a discrezione del progettista.

Occorre ora considerare più da vicino, come si deve operare per soddisfare le condizioni sui lati $x = \pm a$.

Nei punti di tali lati l'inclinazione $\frac{\partial w}{\partial x}$ deve essere la stessa, come già più volte si è detto, per la piastra e per la struttura secondaria, ovvero deve verificarsi altra condizione analoga. A tale riguardo è bene, per chiarezza di esposizione, distinguere i vari casi possibili nella pratica, in relazione alla struttura secondaria. Possono aversi:

1.°) Due piastre tipo AB e trave CD che termina a dette piastre, il tutto in situazione di simmetria. Sono noti gli sforzi di taglio T_1 e T_2 sui bordi della piastra paralleli a y, e si porrà, per una piastra AB, e per la lunghezza comune alla piastra e alla trave,

$$\text{per } x = a \qquad D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = T_1$$

$$\text{per } x = -a \qquad D\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) = 0.$$

2.°) Diverse piastre tipo AB e travi CD correnti continua su esse come nello schema della fig. 3.

Per la trave le inclinazioni dette sono esprimibili notoriamente in fun-

1 2 3 4 5 6

Fig. 3.

zione dei momenti agenti alle estremità di ogni campata di trave: p. es. l'inclinazione γ della trave CD in 2 si può esprimere in funzione di M_2 e M_3 oltre che dei carichi esterni, mediante la nota relazione

$$\gamma = \frac{2M_1 l_1}{6EI} + \frac{M_1 l_1}{6EI} + \frac{m_3}{6EI}$$

essendo m_3 il momento statico della superficie semplice dei momenti rispetto a 3.

Per la piastra AB occorrerà come innanzi detto determinare anzitutto le 4 costanti c_i in funzione dei momenti M e degli sforzi di taglio T incogniti lungo i bordi $x = \pm a$, mediante la:

$$-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = M_x \qquad \text{e la} \qquad -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = T_x$$

dove gli sforzi di taglio T sono esprimibili ovviamente in funzione dei momenti M analogamente a quanto si opera per la trave continua. Si uguaglieranno poi le inclinazioni della piastra e della trave nei punti comuni alla piastra e all'asse della trave e si avranno le equazioni determinatrici dei momenti sul bordo, e quindi delle costanti c.

Va notato, per maggior chiarezza, che l'inclinazione della trave p. es. in 3 dipende dai momenti M_2 e M_3 e in 4 dai momenti M_4 e M_5 mentre le costanti c della piastra 3 4 sono determinate in funzione di M_3 e M_4: quindi nei punti del bordo 3 avremo una equazione contenente M_2 M_3 M_4, in punti del bordo 4 avremo una equazione contenente M_3 M_4 M_5 cioè ancora equazioni dei tre momenti, legate a catena l'una all'altra, come quelle notissime relative alla trave continua su appoggi rigidi.

3.°) Quattro piastre tipo AB intorno a una piastra tipo P. Il procedimento è analogo a quello del caso precedente, ma le operazioni sono più complesse. Si determinano le costanti c per la piastra AB in funzione dei momenti sui bordi $x = \pm a$ di essa, come nel caso precedente, ma quelle della piastra P vanno determinate in funzione dei momenti su tutti e quattro i bordi. La piastra P è parzialmente incastrata ai bordi onde per essa occorrerà porre, come si pone notoriamente per le piastre incastrate ai bordi:

$$W' = \mathrm{w}' + \Sigma c'_m \mathrm{w}'_m$$

dove w′ ha l'espressione relativa al caso della piastra appoggiata, e

$$\mathrm{w}'_m = \left[y \left(e^{\frac{m\pi y'}{a}} - e^{\frac{-m\pi y'}{a}} \right) + y' \left(e^{\frac{m\pi y}{a}} - e^{\frac{-m\pi y}{a}} \right) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a}$$

e le c'_m vanno appunto determinate con le condizioni ai limiti relative al vincolamento della piastra ai bordi. Si scriveranno allora tante equazioni esprimenti l'eguaglianza delle inclinazioni nei diversi punti del bordo comune alle due piastre per quante costanti si hanno a disposizione cioè per quanti termini si pongono nella sommatoria $\Sigma c'_m \mathrm{w}'_m$. Le espressioni delle inclinazioni ai bordi conterranno momenti incogniti i quali verranno così determinati. Si vede subito però che la determinazione detta è unica e complessiva per tutte le quattro piastre AB e per la P: in altri termini, nell'equazione che esprime l'eguaglianza delle inclinazioni in un punto del bordo tra la piastra P e una delle AB compaiono anche i momenti relativi agli altri bordi. Il calcolo diviene quindi naturalmente complesso. La situazione si complica ancora se la piastra P si estende oltre la piastra AB, cioè se è continua su di essa. Questo è appunto il caso più generale, ma non ci fermiamo a svilupparlo perchè il modo di risolverlo non cambia

rispetto ai casi precedenti, mentre le relative espressioni divengono sempre più complesse. Tanto più che i due ultimi casi, per quanto siano quelli che in effetti più da vicino aderiscono alla realtà, possono in pratica non affrontarsi, senza con ciò sacrificare molto l'esattezza della ricerca. Difatti questa ha per iscopo principalmente di determinare le condizioni di vincolamento della piastra P alla AB; poichè in generale vi è simmetria nelle due direzioni normali, cioè la P è contornata da piastre AB tutte eguali, si può scindere la detta piastra nel sistema di due travi ortogonali, al solo scopo però di determinare il grado di incastro. Si ricade così nei primi due casi tenendo però presente che esisteranno ora diverse travi che scaricano sulla piastra AB, la quale va quindi sempre divisa in strisce, come sopra è detto, per le quali interverrà la determinazione di altrettante coppie di costanti. Simili approssimazioni sono del resto abituali nel calcolo delle piastre.

La detta determinazione dà luogo, per ogni striscia caricata, alle stesse espressioni, e quindi non va ripetuta, come procedimento, per le diverse strisce, dato che varia per esse il solo coefficiente di proporzionalità tra abbassamento e carico, onde occorre cambiare il solo computo numerico. Considerazioni analoghe a quelle sopra sviluppate valgono per le strisce non caricate, cioè per quelle per le quali è $\Delta_4 w = 0$, e il procedimento da applicare è identico, onde non è il caso di ripeterlo.

Il problema così trattato, presenta in generale un grado notevole di pratica complessità. Ma quello che viene risolto senza grandi difficoltà di computi è il complesso trave-piastra cioè, precisando, la struttura costituita da una trave che trasmette il proprio carico a una o più piastre che rappresentino, rispetto alla trave, la struttura principale portante tutto il complesso.

Tale schema costruttivo tiene già conto sufficientemente del fenomeno principale sul quale qui si è voluto fermare l'attenzione, cioè sull'effetto degli estesi appoggi elastici, sia nei riguardi, come si è detto, dell'influenza di una campata sull'altra, sia nei riguardi della distribuzione delle reazioni di tali appoggi. I risultati ottenuti possono con buona approssimazione applicarsi a casi più complessi.

Inoltre lo schema studiato pur nella schematizzazione ora accennata mette in luce il vero comportamento, secondo il nostro modo di vedere, di alcune strutture che abitualmente si calcolano in modo molto differente, p. es. le solette dei solai a fungo.

Nei calcoli relativi a tali strutture, siano essi eseguiti secondo metodi complessi o approssimati, si considera la soletta come omogenea, in relazione alla sua struttura e alle sue condizioni di vincolamento, in tutte le direzioni, ciò che a nostro parere non è, per la molto maggiore rigidità di alcune zone (quelle che per noi sono, nel calcolo che precede, le strutture principali) dovute al diverso momento di inerzia delle sezioni trasversali

e sopratutto al diverso vincolamento. Ed è da notare che i risultati sperimentali finora conseguiti sui solai a fungo non sono affatto in concordanza coi metodi di calcoli sopra accennati. Ma su tale argomento ci proponiamo di ritornare di proposito esaminando a fondo la questione col corredo di elementi teorici e sperimentali, allo scopo di cercare di individuare il vero comportamento della struttura ricordata.

5. Vogliamo intanto aggiungere un'ultima osservazione. Può occorrere di avere una indicazione anche più largamente approssimata ma di più facile raggiungimento rispetto al metodo finora esposto. Ciò può avvenire anche frequentemente, perchè può spesso occorrere non la determinazione precisa della legge di distribuzione delle reazioni in modo da avere il valore di esse in ogni singolo punto, ma piuttosto quella dell'effetto complessivo dovuto alla solidarietà tra struttura principale e secondaria. Si presenterà spesso ad es. il problema in una delle seguenti forme:

a) qual'è il grado di incastro di una trave ad una piastra del tipo sopra studiato?

b) si risente l'effetto della continuità tra due travi che terminano ad una piastra sempre del tipo detto?

c) o per meglio dire, fino a qual grado di rigidità di essa, si risente l'effetto della continuità?

A tutti tali quesiti non può rispondersi con l'applicare teorie elementari; ma d'altra parte per rispondere ad essi non occorre la determinazione del fenomeno punto per punto.

Ciò premesso, riteniamo che il problema in esame possa risolversi da tal punto di vista anche in modo molto più semplice di quello fin ora esposto, in base alle seguenti considerazioni.

La reazione che si produce nei diversi punti della piastra AB dipende, come si è detto, dall'abbassamento che ivi si verifica; l'abbassamento è una determinata funzione, oltre che del carico che lo produce, delle coordinate x e y; il rapporto poi tra abbassamento e reazioni è anche funzione di x e y e, per quanto si è detto più su, specialmente di y. Tale rapporto varia in modo diverso da come varia l'abbassamento; difatti questo è quello che si verifica in una piastra caricata come supposto nella presente nota, mentre il rapporto detto deriva dalla considerazione della piastra caricata da un carico distribuito su una piccola superficie. Tuttavia si può supporre che le due leggi di variazioni non abbiano un andamento molto diverso. In via approssimativa, e magari per ottenere solo un primo risultato, come sopra si diceva, si potrà supporre che i due effetti si compensino, e che per conseguenza la reazione della piastra sia costante rispetto a y, e vari solo con la x; dovremo allora supporre una legge di distribuzione della reazione costante lungo l'asse y e variabile lungo l'asse x come varia l'ab-

bassamento. Ricerchiamo quindi una espressione di spostamento che soddisfi tali condizioni.

Poniamo:

$$w' = e^{\alpha x}[\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x)]\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky) \equiv \psi_1(x)\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

$$w'' = e^{-\alpha x}[\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x)]\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky) \equiv \psi_2(x)\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

$$w''' = e^{\alpha x}[\operatorname{sen}(\alpha x) - \cos(\alpha x)]\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky) \equiv \psi_3(x)\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

$$w^{IV} = e^{-\alpha x}[\operatorname{sen}(\alpha x) - \cos(\alpha x)]\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky) \equiv \psi_4(x)\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

essendo $k = \frac{\pi}{b}$ e r numero intero.

E derivando successivamente:

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} = 2\alpha^2 e^{\alpha x}[\cos(\alpha x) - \operatorname{sen}(\alpha x)]\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

$$\frac{\partial^4 w'}{\partial x^4} = -4\alpha^4 e^{\alpha x}[\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x)]\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = -\psi(x)\, r^2 k^2 \frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

$$\frac{\partial^4 w'}{\partial y^4} = \psi(x)\, r^4 k^4 \frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

$$\frac{\partial^4 w'}{\partial x^2 \partial y^2} = -2\alpha^2 r^2 k^2 e^{\alpha x}[\cos(\alpha x) - \operatorname{sen}(\alpha x)]\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(rky)$$

e similmente per w'', w''', w^{IV}.

Per la espressione sopra scritta sono verificate le seguenti proprietà:

per $y = 0$ e $y = b$

si ha:

$$w' = 0 \qquad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w'}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 w'}{\partial y^2} = 0$$

quindi vengono soddisfatte le condizioni sui lati appoggiati.

In quanto al Δ_4 si ha per esso, per un singolo w',

$$\Delta_4 w_1' = e^{\alpha x}\Big\{-4\alpha^4[\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x)] + k^4 r^4[\operatorname{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x)] - \\ - 4\alpha^2 k^2 r^2[\cos(\alpha x) - \operatorname{sen}(\alpha x)]\Big\}\frac{1}{r^5}\operatorname{sen}(kry).$$

Perchè sia:

$$\Delta_4 w' = - C_1 w' = - C_1 \left[e^{\alpha x} \{ \text{sen}(\alpha x) + \cos(\alpha x) \} \frac{1}{r^4} \text{sen}(kry) \right]$$

dev' essere:

$$-C_1[\text{sen}(\alpha x)+\cos(\alpha x)] = [\text{sen}(\alpha x)+\cos(\alpha x)](-4\alpha^4+r^4k^4) - [\cos(\alpha x) - \text{sen}(\alpha x)]4\alpha^2r^2k^2$$

e quindi:

$$C_1 = 4\alpha^4 - r^4k^4 + 4\alpha^2r^2k^2 \frac{1 - \text{tg}(\alpha x)}{1 + \text{tg}(\alpha x)}.$$

Noto $C_1 = C \dfrac{1-\eta^2}{EI}$, si può quindi determinare α, mediante la risoluzione dell' equazione sopra scritta, che può farsi per tentativi, dopo aver sviluppato in serie la tangente. Così facendo, si ha che il carico varia secondo x proporzionalmente all' abbassamento, mentre è costante secondo y, se si fa variare r e si assume la $\Sigma \dfrac{1}{r}$ sen kry: l' espressione è difatti analoga, per quanto riguarda la y, a quella nota relativa alla piastra uniformememente caricata con la differenza che non vi è coefficiente costante, contenente il carico uniforme $\dfrac{p}{2ab}$ quale moltiplicatore della $\Sigma \dfrac{1}{r}$ sen kry ma un fattore, che è costante rispetto a y, ma variabile con x.

Ma l' espressione ora trovata determina α in funzione di una C nota, per ogni singolo valore di w'. Occorre quindi ripetere la determinazione di α tante volte quanti termini della sommatoria $\Sigma \dfrac{1}{r}$ sen (rky) si vogliono assumere. Si ha infatti per un w_1'

$$\Delta_4 w_1' = - C\, w_1'$$

e per un w_2', un w_3' ecc.

$$\Delta_4 w_2' = - C w_2' \quad , \quad \Delta_4 w_3' = - C w_3'$$

e quindi, come dev' essere,

$$\Delta_4 (w_1' + w_2' + w_3' + \ldots) = - C (w_1' + w_2' + w_3' + \ldots) = - C\, w'$$

e similmente per w'', w''', w^{IV}.

Sui bordi $x = \pm a$ intanto, per le ipotesi fatte sulla distribuzione del carico nella direzione y, lo sforzo di taglio T_x sarà costante, cioè indipen-

dente da y. Questa è dunque la condizione che bisogna soddisfare; perciò basterà ora determinare le due costanti in modo che si verifichi la condizione sui bordi. Difatti una sola è la incognita da determinare lungo tutto un bordo, lo sforzo di taglio complessivo, o se riesce più comodo, quello lungo un determinato tratto di tale bordo. Anche ora risulterà però praticamente più conveniente ricavare i valori dei momenti incogniti. Espresse le costanti c_1, c_2, c_3, c_4, in funzione dei momenti analogamente al caso precedente e quindi a quanto sopra specificato, si sostituiranno tali espressioni di esse in quelle dello sforzo di taglio relativo alla piastra; si esprimerà similmente lo sforzo di taglio nella struttura secondaria in funzione dei momenti, e si eguaglieranno i detti sforzi di taglio. Nasceranno anche ora delle equazioni dei tre momenti, ma relative non più ad una sola striscia in cui si debba suddividere la struttura, ma a tutte le piastre AB e strutture secondarie. Si scriverà cioè un sol gruppo di tali equazioni dei 3 momenti, tal quale come per le travi continue. Come si vede il lavoro da compiere è enormemente ridotto.

Dopo quanto si è detto, risulta implicitamente determinato anche il procedimento da adottare per tener conto di eventuale carico ripartito sulla struttura principale. Basterà ovviamente scrivere l'espressione dello spostamento corrispondente al carico uniforme, che è nota, e soddisfare le condizioni sui bordi mediante l'introduzione di costanti: il caso è perfettamente analogo a quello sopra trattato per un carico nullo, perchè, per le strutture secondarie, si tratterà sempre di individuare le sollecitazioni prodotte da determinati spostamenti w che si verificano nella struttura principale, come appunto più su è stato fatto.

Risoluzione progressiva di un sistema di equazioni lineari. Analogia con un problema meccanico

Nota del prof. **Franco Jossa**, *presentata dal socio ord.* **C. L. Ricci**

(Adunanza del dì 1.° giugno 1940 - XVIII)

Sunto. — Si risolve il sistema di equazioni lineari mediante la successiva introduzione delle incognite, servendosi di quanto già studiato dall' A. per la risoluzione degli schemi meccanici iperstatici. Si pongono in evidenza i vantaggi del metodo proposto, la maggior brevità rispetto ai metodi abituali e la possibilità di eseguire frequenti verifiche parziali.

1. Si abbia un sistema di equazioni di 1.° grado in $X, X_2 \ldots X_n$:

$$\begin{aligned} \eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 + \ldots\ldots + \eta_{1n} X_n &= d_1 \\ \eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 + \ldots\ldots + \eta_{2n} X_n &= d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \eta_{n1} X_1 + \eta_{n2} X_2 + \ldots\ldots + \eta_{nn} X_n &= d_n. \end{aligned} \tag{1}$$

I valori delle X sono notoriamente dati dalle:

$$\begin{aligned} X_1 &= H_{11} d_1 + H_{12} d_2 + \ldots\ldots + H_{1n} d_n \\ X_2 &= H_{21} d_1 + H_{22} d_2 + \ldots\ldots + H_{2n} d_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ X_n &= H_{n1} d_1 + H_{n2} d_2 + \ldots\ldots + H_{nn} d_n. \end{aligned} \tag{2}$$

In tali espressioni il d_i rappresenta il termine noto i-esimo, η_{ik} il coefficiente dell'incognita k-esima nell'equazione i-esima, mentre H_{ik} [1]) è il rapporto fra il suddeterminato complementare della η_{ik} e il determinato delle η_{ik} stesse.

Per calcolare le X_i occorre dunque, com'è notissimo, calcolare le H; e tale calcolo diventa evidentemente molto laborioso quando il numero delle equazioni e per conseguenza l'ordine dei determinanti diviene alto. Inoltre, dato il gran numero di operazioni da compiere, è molto facile incorrere in errori materiali, i quali costringono a ripetere i computi alla ricerca dell' errore.

Un problema analogo si presenta nella scienza delle costruzioni, quando

---

[1]) H deve leggersi η maiuscola.

si ha una struttura iperstatica, che presenta quindi un numero più o meno grande di incognite. Si riconosce anzi subito che le (1) e (2) sono ancora quelle che valgono nel problema meccanico salvo che in quest' ultimo la matrice dolle η e quella della H sono simmetriche. In tal caso il d_i rappresenta lo spostamento generico dei vincoli, la X_i l'incognita iperstatica, l' η_{ik} lo spostamento che si produce, nel sistema principale, nel punto vincolato k-esimo per effetto della forza $R_i = 1$ agente da sola. Ed ancora la H_{ik}, pur essendo calcolabile tuttora come rapporto tra il suddeterminante complementare di η_{ik} e il determinante delle η_{ik} è ora la reazione che si produce nel vincolo i-esimo, nel sistema vincolato, quando siano nulli tutti gli spostamenti assegnati ai vincoli d_i, eccetto il d_k e sia $d_k = 1$.

Ora tale problema meccanico, risolubile evidentemente per vie ordinarie, cioè mediante la risoluzione del sistema (1) con i mezzi ordinari di analisi, è stato da noi risolto in altro modo [1], e propriamente mediante la successiva introduzione dei vincoli iperstatici. Il metodo di risoluzione da noi proposto si è manifestato particolarmente conveniente sia perchè è un metodo di influenza, sia perchè mentre riduce il lavoro da compiere e risulta più conciso dall' abituale, determina i valori delle incognite con un procedimento graduale, molto meno passibile di errori, e più suscettibile invece di verifiche continue che eliminano l' eventualità di riconoscere la esistenza di errori soltanto alla fine dell' intero procedimento.

Riteniamo pertanto che sia interessante vedere come il procedimento usato per la risoluzione del problema meccanico possa estendersi ed applicarsi a quella del problema puramente algebrico, che si presenta però un po' diversamente, per la mancanza della simmetria dei coefficienti.

Tale procedimento manterrà, nella nuova forma, i vantaggi sopra accennati, compreso quello dovuto all'essere un metodo di influenza e riuscirà quindi di notevole convenienza quando il numero delle incognite è piuttosto elevato.

II. Dato dunque il sistema (1), i valori delle incognite saranno ricercati mediante le espressioni (2): occorre quindi, come dicevamo, calcolare le H_{ik}.

Il problema algebrico si presenta, come si è detto, diversamente da quello meccanico, per la mancanza di ogni simmetria e reciprocità. Difatti è ora

$$\eta_{ik} \neq \eta_{ki} \tag{3}$$

e quindi

$$H_{ik} \neq H_{ki} . \tag{3'}$$

[1]) Jossa F., *Metodo di influenza per il calcolo di strutture iperstatiche mediante la successiva introduzione dei vincoli.* Roma, « Ricerche di ingegneria », 1938, n. 3.

Non esiste quindi un sistema meccanico corrispondente al sistema algebrico (1).

Occorre pertanto, nel caso che ci interessa, ricercare il significato e le espressioni dei singoli elementi, e risolvere il problema per via algebrica, seguendo però la linea logica svolta nel nostro lavoro su citato per i sistemi meccanici.

È chiaro intanto che:

a) le η_{ik} sono coefficienti qualsiasi, ma l'η_{ik} generica rappresenta il contributo (*l' influenza*) che l'incognita X_k posta eguale a 1 reca al termine noto δ_i;

b) le H_{ik} sono anzitutto, come si è detto, i rapporti tra i determinanti complementari delle η_{ik} e il determinante delle η_{ik} stesse, ma l'H_{ik} generica rappresenta anche il contributo (*l'influenza*) che il termine δ_k posto eguale a 1 porta all'incognita X_i.

In considerazione poi del fatto espresso dalle (3) e (3') occorrerà determinare, nel problema algebrico, un numero maggiore di elementi che non nel problema meccanico.

Il metodo che intendiamo seguire, per la risoluzione del sistema (1), è quello della successiva introduzione delle incognite. Supposto risolto, quindi, il sistema con $k-1$ incognite, introducendo la k-esima incognita, poichè a noi interessa sempre determinare le H, occorrerà calcolare:

a) la $H^{(k)}_{kk}$, indicando con $H^{(k)}$ la H nel sistema con k incognite;

b) le $H^{(k)}_{ik}$ e le $H^{(k)}_{ki}$ che si introducono ora, con la precedente, per la prima volta;

c) le altre $H^{(k)}_{ij}$ con i e $j<k$, che si possono riguardare come nuovi valori, nel sistema con k incognite delle precedenti $H_{ij}^{(k-1)}$ già determinate. Si potrà scrivere quindi, per il punto *c)*, facendo sempre i e $j<k$

$$H_{ij}^{(k)} = H_{ij}^{(k-1)} + r_{ik} H_{kj}^{(k)} \qquad (4)$$

dove il secondo termine della somma a secondo membro rappresenta l'influenza che l'introduzione della k-esima incognita esercita sull'$H^{(k-1)}$, e particolarmente poi l'r_{ik} rappresenta il contributo (*l' influenza*) che l'$H_{kj}^{(k)}$ fatta eguale a 1 porta all'$H_{ij}^{(k)}$ nel sistema con k incognite. Tale r_{ik} corrisponde al K_{ik} del problema meccanico nel nostro scritto più volte citato.

È facile ora controllare che si ha, (in perfetta analogia con quanto abbiamo ottenuto nel problema meccanico) essendo k il numero delle incognite:

$$r = -\sum_{j=1}^{k-1} \eta_{ik} H_{ij}^{(k-1)} \qquad (5)$$

$$
\begin{aligned}
H_{kk}^{(k)} &= \frac{1}{\eta_{kk} + \sum_{j=1}^{k-1} \eta_{kj}\, r_{jk}} \\
H_{ik}^{(k)} &= - H_{kk}^{(k)} \sum_{j=1}^{k-1} \eta_{jk}\, H_{ij}^{(k-1)} \\
H_{ki}^{(k)} &= - H_{kk}^{(k)} \sum_{j=1}^{k-1} \eta_{kj}\, H_{ji}^{(k-1)} .
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Le (4) e (6) risolvono il problema. E si vede subito che la 1.ª delle (6) corrisponde ad analoga del nostro scritto precedente, mentre la 2.ª delle (6) corrisponde alla (1) di esso, cioè alla formola generale che dà il valore di un'incognita iperstatica adoperando, per la risoluzione del sistema, il secondo teorema di CASTIGLIANO generalizzato.

III. Per chiarire il procedimento ora indicato, ne esponiamo l'applicazione a un caso singolo. Facciamo poi seguire un esempio numerico.

Si abbia il sistema di tre equazioni lineari a tre incognite:

$$
\begin{aligned}
\eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 + \eta_{13} X_3 &= \delta_1 \\
\eta_{21} X_2 + \eta_{22} X_2 + \eta_{23} X_3 &= \delta_2 \\
\eta_{31} X_1 + \eta_{32} X_2 + \eta_{33} X_3 &= \delta_3 .
\end{aligned}
$$

Le H_{ik} da determinare sono in tal caso nove.

Introduciamo le incognite una alla volta. Se l'incognita è una, X_1 si avrà per essa:

$$\eta_{11} X_1 = \delta_1$$

e quindi

$$H'_{11} = \frac{1}{\eta_{11}}$$

e si verifica che è

$$H'_{11}\, \delta_1 = X_1 .$$

Introduciamo la seconda incognita, X_2, e quindi una seconda condizione; consideriamo cioè il sistema:

$$
\begin{aligned}
\eta_{11} X_1 + \eta_{12} X_2 &= \delta_1 \\
\eta_{21} X_1 + \eta_{22} X_2 &= \delta_2
\end{aligned}
$$

e calcoliamo le quattro H_{ik} ora esistenti, cioè H''_{11}, H''_{12}, H''_{21}, H''_{22}.

Applichiamo quindi le (4) e (6) sopra scritte.
Si ha, per la 1.ª delle (6):

$$H''_{22} = \frac{1}{\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21} H'_{11}}.$$

Per la 2.ª e la 3.ª delle (6):

$$\begin{aligned} H''_{12} &= -H'_{11} H''_{22} \eta_{12} \\ H''_{21} &= \quad H'_{11} H''_{22} \eta_{21}. \end{aligned}$$

E infine per la (4):

$$H''_{11} = H'_{11} + r_{12} H''_{21}.$$

Con ciò è risoluto il problema per il sistema di due equazioni con due incognite.

Introduciamo infine la 3.ª incognita e la 3.ª equazione e calcoliamo le relative nove H_{ik}.
Si ha anzitutto, per la (5):

$$\begin{aligned} r_{13} &= -(\eta_{13} H''_{11} + \eta_{23} H''_{12}) \\ r_{23} &= -(\eta_{13} H''_{21} + \eta_{23} H''_{22}). \end{aligned}$$

Poi, analogamente a quanto sopra, si ha:

$$H'''_{33} = \frac{1}{\eta_{33} - \eta_{31} r_{13} - \eta_{32} r_{23}} = \frac{1}{\eta_{33} - \eta_{31}(\eta_{13} H''_{11} + \eta_{23} H''_{12}) - \eta_{32}(\eta_{13} H''_{21} + \eta_{23} H''_{22})}$$

e poi:

$$\begin{aligned} H'''_{13} &= -H'''_{33}(\eta_{13} H''_{11} + \eta_{23} H''_{12}) \\ H'''_{23} &= -H'''_{33}(\eta_{13} H''_{21} + \eta_{23} H''_{22}) \\ H'''_{31} &= -H'''_{33}(\eta_{31} H''_{11} + \eta_{32} H''_{21}) \\ H'''_{32} &= -H'''_{33}(\eta_{32} H''_{22} + \eta_{31} H''_{12}). \end{aligned}$$

E infine:

$$\begin{aligned} H'''_{12} &= H''_{12} + r_{13} H'''_{32} \\ H'''_{22} &= H''_{22} + r_{23} H'''_{32} \\ H'''_{21} &= H''_{21} + r_{23} H'''_{31} \\ H'''_{11} &= H''_{11} + r_{13} H'''_{31}. \end{aligned}$$

Calcolate così le H_{ik}, i valori delle incognite si hanno dalle:

$$\begin{aligned} X_1 &= H'''_{11} \delta_1 + H'''_{12} \delta_2 + H'''_{13} \delta_3 \\ X_2 &= H'''_{21} \delta_1 + H'''_{22} \delta_2 + H'''_{23} \delta_3 \\ X_3 &= H'''_{31} \delta_1 + H'''_{32} \delta_2 + H'''_{33} \delta_3. \end{aligned}$$

È chiaro intanto, come accennavamo più su, che la risoluzione del sistema si svolge più agevolmente col metodo ora esposto che non mediante il calcolo dei determinanti, dato che si riescono ad evitare lunghi sviluppi. Per di più, ogni volta che si introduce un' incognita i-esima, si è risolto il problema con $i-1$ incognite, si è potuto verificare l' esattezza del procedimento seguito fino alla risoluzione del sistema con $i-1$ incognite, e il risultato conseguito è definitivo. In altri termini, se il sistema con i incognite non risulterà soddisfatto, ciò vorrà dire che si è commesso qualche errore soltanto nel calcolo degli ultimi termini, relativi al sistema con i incognite, calcolo che è breve, quindi facilmente verificabile e ripetibile.

Facciamo notare, inoltre, che col procedimento ora esposto, oltre a risolvere il sistema di equazioni (1), si è più generalmente individuata la trasformazione lineare inversa di una data. Si possono infatti supporre variabili i termini δ_i senza che con ciò varino le H, che rimangono quindi, come nel problema meccanico, coefficienti di influenza; determinate esse H, sono appunto determinati i coefficienti della trasformazione (2) inversa della (1).

Riteniamo quindi che i vantaggi accennati siano nel complesso di notevole importanza.

Facciamo seguire un esempio numerico, relativo a un sistema con tre incognite.

IV. Esempio numerico.

Si abbia il sistema:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= 21 \\ 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 19. \end{aligned}$$

Si ha per esso:

$$H'_{11} = \frac{1}{5}$$

$$H''_{22} = \frac{1}{-4 - 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5}} = -\frac{5}{26}$$

$$H''_{12} = 3 \cdot \frac{1}{5} \frac{5}{26} = \frac{3}{26}$$

$$H''_{21} = -2 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{26} = \frac{2}{26}$$

$$H''_{11} = \frac{1 - 3 \cdot \frac{2}{26}}{5} = \frac{4}{26}.$$

Verifichiamo il sistema con due incognite:

$$5x_1 + 3x_2 = 21$$
$$2x_1 - 4x_2 = -2.$$

Avremo le:

$$x_1 = H_{11}\delta_1 + H_{12}\delta_2 = \frac{4}{26}21 - \frac{3}{26}2 = 3$$

$$x_2 = H_{12}\delta_1 + H_{22}\delta_2 = \frac{2}{26}21 + \frac{5}{26}2 = 2$$

e si può subito controllare che effettivamente tali valori soddisfano il sistema dato.

Poi si ha:

$$H'''_{33} = \frac{1}{3} \qquad H'''_{13} = 0$$

$$H'''_{23} = \frac{1}{3} \qquad H'''_{31} = -\frac{16}{78}$$

$$H'''_{32} = \frac{1}{78} \qquad H'''_{11} = \frac{1}{78}$$

$$H'''_{21} = -\frac{10}{78} \qquad H'''_{12} = \frac{9}{78}$$

$$H'''_{22} = -\frac{14}{78}.$$

E si ha:

$$X_1 = H'''_{11}\delta_1 + H'''_{12}\delta_2 + H'''_{13}\delta_3 = 3$$
$$X_2 = H'''_{21}\delta_1 + H'''_{22}\delta_2 + H'''_{23}\delta_3 = 4$$
$$X_3 = H'''_{31}\delta_1 + H'''_{32}\delta_2 + H'''_{33}\delta_3 = 2.$$

Valori che soddisfano, come è facile verificare, il sistema dato.

SUR L'EXISTENCE D'UN ENSEMBLE INDÉNOMBRABLE À PROPRIÉTÉ λ'.

Nota del socio corr. straniero **Waclaw Sierpinski**

(Adunanza del dì 4 maggio 1940 - XVIII)

Sunto. — Dimostrazione, indipendente dall'ipotesi del continuo, dell'esistenza di un insieme lineare non numerabile dotato della proprietà λ'.

On dit qu'un ensemble linéaire E jouit de la propriété λ', s'il existe pour tout ensemble linéaire dénombrable D un ensemble linéaire H qui est un G_δ tel que $EH < D < H$ (en d'autres termes, si tout ensemble linéaire dénombrable D est un G_δ relativement à l'ensemble $E + D$).

Les démonstrations connues d'existence des ensembles indénombrables à propriété λ' utilisent l'hypothèse du continu [1]. Or, je montrerai ici que cette existence résulte sans peine d'un théorème de M. F. HAUSDORFF démontré par lui en utilisant l'axiome du choix, mais sans faire appel à l'hypothèse du continu [2].

D'après ce théorème il existe une suite transfinie de type Ω, $\{\Gamma_\alpha\}_{\alpha<\Omega}$, d'ensembles G_δ linéaires, telle que

$$\Gamma_\xi < \Gamma_\eta \text{ et } \Gamma_\xi \neq \Gamma_\eta \text{ pour } \xi < \eta < \Omega \tag{1}$$

et qu'en désignant par X l'ensemble de tous les nombres réels, on a

$$X = \sum_{\alpha<\Omega} \Gamma_\alpha . \tag{2}$$

D'après (1) il existe pour tout nombre ordinal $\alpha < \Omega$ un nombre réel x_α, tel que

$$x_\alpha \,\varepsilon\, \Gamma_\alpha - \sum_{\xi<\alpha} \Gamma_\xi . \tag{3}$$

Posons

$$E = \{x_\alpha\}_{\alpha<\Omega} . \tag{4}$$

Il résulte de (3) que l'ensemble E est indénombrable.

---

[1]) Voir p. e. ma Note dans *C. R. Soc. Sc. Varsovie* Cl. III, **30** (1937), p. 259.

[2]) *Fundamenta Mathematicae* **26**, p. 248.

Or, soit $D = (p_1, p_2, \ldots)$ un ensemble linéaire dénombrable quelconque. D'après (2) il existe pour tout n naturel un nombre ordinal $\alpha_n < \Omega$, tel que $p_n \varepsilon \Gamma_{\alpha n}$. Vu la propriété connue de nombres ordinaux $< \Omega$, il existe un nombre ordinal $\alpha < \Omega$, tel que $\alpha_n < \alpha$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Posons:

$$E_\alpha = \{x_\xi\}_{\xi < \alpha}:$$

vu que $\alpha < \Omega$, ce sera un ensemble au plus dénombrable, et l'ensemble

$$\Gamma = \Gamma_\alpha - (E_\alpha - D)$$

sera un G_δ. Or, on démontre sans peine que

$$\varepsilon \Gamma < D < \Gamma.$$

L'ensemble Γ étant un G_δ, la formule (5) prouve que l'ensemble E jouit de la propriété λ'.

Ainsi l'existence d'un ensemble linéaire indénombrable à propriété λ' est démontrée sans faire appel à l'hypothèse du continu.

EXEMPLE EFFECTIF D' UNE FAMILLE DE $2^{\aleph_1}$ ENSEMBLES LINÉAIRES CROISSANTS. [1])

Nota del socio corr. straniero **Waclaw Sierpinski**

(Adunanza del dì 4 maggio 1940 - XVIII)

Sunto. — Definizione *effettiva* di una famiglia di $2^{\aleph_1}$ insiemi lineari tali che di due qualunque di essi uno sia parte dell' altro.

Le but de cette Note est de *définir effectivement une famille F formée de $2^{\aleph_1}$ ensembles linéaires croissants*, c. a. d. telle que deux ensembles de la famille F sont toujours distincts et l'un d'eux est contenu dans l'autre. La construction de cette famille est basée sur ce

LEMME. *On sait définir une fonction* $f(D)$ *qui fait correspondre à tout ensemble dénombrable D de nombres ordinaux $\geq \omega$ et $< \Omega$ un ensemble linéaire non vide* $f(D)$ *de sorte qu' on a toujours* $f(D).f(D') = 0$ *pour* $D \neq D'$.

Ce lemme peut être regardé comme une extension aux ensembles dénombrables de nombres ordinaux du résultat connu de M. H. LEBESGUE (*Journ. de Math.* t. I (1905), p. 213) qui a défini effectivement une suite transfinie de type Ω d'ensembles linéaires disjoints (non vides). L'idée de la démonstration de notre lemme n'est qu'une modification de celle de M. LEBESGUE.

Soit maintenant F l'ensemble de toutes les suites transfinies de type Ω

$$(1) \qquad a_1, a_2, \ldots a_\omega, a_{\omega+1}, \ldots, a_\xi, \ldots \qquad (\xi < \Omega)$$

formées de nombres 0 et 1, telles que $a_n = 0$ pour $n = 1, 2, \ldots$ et qu' il existe une infinité d'indices $\xi < \Omega$, pour lesquels $a_\xi = 1$. L'ensemble F est de puissance $2^{\aleph_1}$. Ordonnons les suites transfinies formant F d'après le principe de premières différences.

D étant un ensemble dénombrable de nombres ordinaux $\geq \omega$ et $< \Omega$, désignons par $s(D)$ la suite (1), où $a_\xi = 1$ pour $\xi \varepsilon D$ et $a_\xi = 0$ pour ξ non εD Désignons maintenant pour toute suite trasfinie t de l'ensemble F par $E(t)$ l'ensemble-somme de tous les ensembles $f(D)$, la sommation s' étendant à tous les ensembles D pour lesquels on a soit $s(D) < t$, soit $s(D) = t$. On

---

[1]) Per necessità tipografiche, in questa Nota e nella successiva la lettera $\aleph$ sostituisce la lettera ebraica *Aleph* nel suo significato di numero cardinale. (N. d. R.)

démontre que

$$(2) \qquad E(t) < E(t') \neq E(t) \text{ pour } t < t' \; (t \varepsilon F, t' \varepsilon F).$$

D'après (2) la famille de tous les ensembles $E(t)$, où $t \varepsilon F$ est une famille de puissance $2^{\aleph_1}$ d'ensembles linéaires croissants [1].

L'existence d'une telle famille entraîne tout de suite la proposition suivante que j'ai démontrée ailleurs [2]) par une autre voie:

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, l'ensemble de tous les nombres réels est une somme de $2^{2^{\aleph_0}}$ ensembles croissants.

On peut même dire plus: nous savons définir effectivement une famille d'ensembles linéaires croissants dont on peut démontrer à l'aide de l'hypothèse du continu qu'elle est de puissance $2^{2^{\aleph_0}}$.

Or, il est à remarquer que nous savons démontrer sans faire appel à l'hypothèse du continu (en utilisant seulement l'axiome du choix) qu'il existe une famille de puissance $> 2^{\aleph_0}$ d'ensembles linéaires croissants [3]).

---

[1]) Pour plus de détails de cette démonstration je renvoie le lecteur à mon travail sous même titre qui paraîtra dans le journal *Fundamenta Mathematicae.*

[2]) Sierpinski W., *Hypothèse du continu* (1934), p. 120, prop. C_{64}.

[3]) Fund. Math. **3**, p. 109.

Sur les espaces (V) séparables universels

Nota del socio corr. straniero **Waclaw Sierpinski**

(Adunanza del dì 4 maggio 1940 - XVIII)

Sunto. — Dimostrazione dell'esistenza di spazi (V) separabili universali, numerabili o di potenza non inferiore a quella del continuo.

Un espace quelconque E est dit *espace* (V) *séparable*, si l'on a donné une famille dénombrable F de sous-ensembles de E et si l'on a fait correspondre à tout élément p de E une sous-famille $F(p)$ de F d'une façon arbitraire, sous la seule condition que chaque ensemble de la famille $F(p)$ contient p (Les ensembles de la famille $F(p)$ sont dits *voisinages* de p) [1].

Un sous-ensemble Q d'un espace (V) séparable, E, devient évidemment un espace (V) séparable, si l'on prend pour voisinages (dans Q) de l'élément p de Q les ensembles QV, où V sont des voisinages de p dans l'espace E. Nous dirons alors que l'espace Q est *contenu* dans l'espace E.

Nous dirons que deux espaces (V), E_1 et E_2, sont congruents, s'il existe une correspondance biunivoque φ entre les éléments de E_1 et ceux de E_2 qui, pour tout élément p de E_1, transforme tout voisinage de p (dans E_1) en un voisinage de $\varphi(p)$ (dans E_2), et si, pour tout élément q de E_2, la transformation inverse φ^{-1} (de E_2 en E_1) transforme tout voisinage de q (dans E_2) en un voisinage de $\varphi^{-1}(q)$ (dans E_1).

Un espace (V) séparable de puissance m est dit *universel* de puissance m s'il contient, pour tout espace (V) séparable de puissance m un espace congruent. On a la proposition suivante :

Si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, *il existe un espace* (V) *séparable universel de toute puissance infinie.*

Cette proposition est une conséquence immédiate de deux théorèmes suivants qui peuvent être démontrés sans faire appel à l'hypothese du continu :

1. *Il existe pour tout nombre cardinal* $\mathfrak{m} \geq 2^{\aleph_0}$ *un espace* (V) *séparable universel de puissance* $\mathfrak{m}$.

2. *Il existe un espace* (V) *séparable universel dénombrable.*

L'espace E qui satisfait au théorème 1 est défini de la façon suivante Soit m un nombre cardinal $\geq 2^{\aleph_0}$ et soit M un ensemble donné de puissance m. Soit S l'ensemble de toutes les suites infinies $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ for-

[1]) Fréchet M., *Les epaces abstraits*, Paris 1928, p. 188.

mées de nombres 0 et 1 et telles que, pour tout nombre naturel k, l'égalité $\alpha_{2k-1} = 1$ entraine $\alpha_{2k} = 1$. Soit E l'ensemble de tous les systèmes (m, s), où $m \varepsilon M$ et $s \varepsilon S$. Vu que $m \geq 2^{\aleph_0}$, on a $E = m$. k étant un nombre naturel, désignons par V_k l'ensemble de tous les éléments (m, s) de E, où s est une suite de S dont le $2k$-ième terme est $= 1$. Posons $F = (V_1, V_2, \ldots)$; $p = (m, s)$ étant un élément de E et k un nombre naturel, convenons que V_k est un voisinage de p si le $(2k-1)$-ème terme de la suite s est $= 1$, et seulement dans ce cas. On démontre que l'ensemble E devient ainsi un espace (V) séparable universel de puissance m.

Quant à la démonstration du théorème 2, elle est beaucoup plus difficile que celle du théorème 1 et elle s'appuie sur l'existence d'une suite universelle d'ensembles dénombrables (dont la démonstration n'est pas facile) [1].

Pour plus de détails je renvoie le lecteur à mon travail sous même titre qui paraîtra dans le journal *Fundamenta Mathematicae.*

---

[1]) Voir W. Sierpinski, *Fund. Math.* **26**, p. 327.

Processo verbale dell'adunanza del dì 11 novembre 1939 - XVIII.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Pascal Ernesto, Pierantoni, Ricci ed i soci corrispondenti nazionali De Dominicis, Gallucci, Nobile, Ippolito e Zirpolo.

Il presidente ricorda, con profondo cordoglio, l'immatura morte, avvenuta in Roma il 6 agosto 1939, del socio senatore Gaetano Scorza, ed annunzia che, in omaggio alla precisa volontà dell'estinto, non sarà di lui tenuta alcuna commemorazione. Indi rammenta, con vivo compiacimento, le recenti nomine del consocio Longo ad Accademico d'Italia e del consocio Giordani a presidente dell'Istituto di ricostruzione industriale. All'Ecc. Longo, presente all'adunanza, egli è lieto di rinnovare pubblicamente i rallegramenti suoi e dell'Accademia. Il socio Longo ringrazia. All'Ecc. Giordani il presidente inviò, in data 6 novembre il telegramma seguente: « Quale presidente Reale Accademia Scienze Napoli, che onorasi averti suo « socio, esprimoti nome suo et mio vivissimo compiacimento per alta stima « et fiducia manifestatati dal Duce nominandoti presidente Istituto Rico- « struzione Industriale ». E in data 8 novembre l'Ecc. Giordani ha così risposto: « Caro Presidente, ho ricevuto l'affettuoso telegramma che hai « voluto inviarmi a nome della gloriosa Accademia napoletana e sono molto « rammaricato di non poter di persona ringraziare te e gli altri colleghi « in occasione dell'adunanza di sabato. Ti sarò infinitamente grato se, ren- « dendoti interprete dei miei ringraziamenti, tu vorrai anche esprimere ai « soci tutti la mia gioia di vedermi ricordato da loro, perchè la mia appar- « tenenza all'Accademia di Napoli mi riconduce sempre col pensiero ai « sentimenti di gratitudine ch'io ho sempre nutrito e nutro per i miei « maestri che vi siedevano all'epoca in cui vollero nominarmi, a quelli che « ancora vi siedono ed ai quali auguro di tutto cuore un'attività accade- « mica lunghissima e feconda. Foste voi a formare la mia mente ed a sor- « reggermi nei primi passi, a voi debbo tutto quello che sono e lo debbo « non solo alla vostra dottrina, ma anche alla vostra bontà. Mi e dolce « pensare che, quando la mobilitazione sarà finita, ritroverò ancora tra voi « immutata l'accogliente simpatia che mi ha sempre confortato. Ed in tale « attesa, spero di non mancare, se non molto raramente, alle nostre adu- « nanze ».

Il segretario presenta il volume del Rendiconto relativo all'anno accademico 1938-39 (XVII) e le memorie del socio Carnera (*Ricerche sulle variazioni della latitudine osservate nella stazione di Batavia*) e del socio Checchia-Rispoli (*Su alcuni clipeastri miocenici della Calabria*), accolte nel volume in corso degli Atti.

indi comunica che, in base all' art. 22 dello Statuto, il Presidente ha fissato i seguenti giorni per le tornate ordinarie dell' anno accademico 1939-40 (XVIII): novembre 11, dicembre 9, gennaio 13, febbraio 3, marzo 2, aprile 6, maggio 4, giugno 1.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio vengono segnalati il *Rapporto sull'attività 1936-38 dell' Ufficio Centrale per il servizio internazionale delle latitudini*, offerto dal socio CARNERA, il lavoro su *La più antica carta regionale della Puglia*, inviato dal socio COLAMONICO, la nota del socio D' ERASMO su *Il Vesuvio e i Campi Flegrei alla fine del Settecento nelle descrizioni di Lazzaro Spallanzani e di altri contemporanei*, e la memoria del prof. F. AMODEO sopra l' *Origine e sviluppo della geometria proiettiva*. Il socio LONGO offre in omaggio, discorrendone, una nota della dott. Linda CAPPELLO sull' anatomia del luppolo. Il presidente ringrazia i donatori.

Il socio MALQUORI presenta una nota del dott. Vittorio CIRILLI *Sull'impiego della termobilancia a registrazione continua nello studio della disidratazione termica dei composti solidi idrati*, e una nota del dott. V. SOLLAZZO *Sulla preparazione della Mullite per trattamento termico di miscela di caolino e allumina*, proponendo di accoglierle per la stampa nel Rendiconto. L' Accademia approva.

Il socio RICCI presenta, per l' inserzione nel medesimo periodico, due note del prof. Raffaele TARANTINI, dal titolo: *Sul progetto preliminare di una ruota a disco d' uniforme resistenza*, e *Sulla ruota a disco di uniforme resistenza fuori del regime di progetto*. L' Accademia approva.

Viene quindi accolta la proposta del socio corrispondente GALLUCCI relativa alla stampa nel Rendiconto di una nota del prof. Federico AMODEO dal titolo: *I numeri ρ_a nel nuovo metodo per la geometria delle serie lineari delle curve algebriche*.

Il segretario presenta, a nome del socio CARRELLI che ne propone la inserzione nel Rendiconto, una nota del prof. Giuseppe IMBÒ: *Ricerche geofisiche alle grotte di Pertosa*. L' Accademia approva.

Da parte del medesimo consocio il segretario presenta pure una memoria dello stesso prof. IMBÒ dal titolo: *Azione del vapore d' acqua nell' assorbimento della radiazione solare*. L' Accademia unanime ne delibera la stampa nel volume in corso degli Atti, insieme con i grafici che l' accompagnano.

Processo verbale dell'adunanza del dì 9 dicembre 1939 - XVIII.

Presidenza del sen. DE LORENZO. Assistono i soci ordinari ARMELLINI, BAKUNIN, BOTTAZZI, CARNERA, COLAMONICO, D' ERASMO (segretario), DIAMARE, GIORDANI, LONGO, PASCAL Ernesto, PIERANTONI, ed i soci corrispondenti nazionali ANDREOLI, DE DOMINICIS, GALLUCCI e NOBILE.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 11 novembre, che che è approvato. Il socio Ecc. Giordani ripete all' Accademia i suoi ringraziamenti più vivi per le congratulazioni rivoltegli.

Il socio corrispondente Andreoli, presentando un volume, recentemente comparso nella edizione Einaudi, dal titolo « Tempo e Vita », e dovuto a Lecomte de Noüy e, per la traduzione, al prof. Olivo della R. Università di Bologna, richiama l' attenzione dei colleghi sopra l' interessante studio matematico — che rimonta al periodo postbellico — della legge di cicatrizzazione delle piaghe. Egli ricorda a tale proposito che molto tempo prima (verso il 1912 circa) l' Istituto di Anatomia comparata della R. Università di Napoli aveva iniziato e sviluppato tali ricerche, essenzialmente per merito di Paolo Della Valle. Anzi le ricerche di Della Valle, egli soggiunge, erano ben più ampie: come fanno fede i lavori pubblicati nel Bollettino della Società dei Naturalisti di Napoli e nell' Archivio Zoologico. Oltre a tali ricerche, ne furono condotte altre sulla rigenerazione della coda nelle salamandre; ed in base ai concetti del Della Valle (che saranno richiamati in una apposita comunicazione) vennero tracciate preventivamente le successive curve di sviluppo della coda rigenerata ed eseguite fotografie dei successivi stadi concreti della rigenerazione. Collaborarono allora col Della Valle i consoci Giordani ed Andreoli; ed il risultato venne a confermare le previsioni teoriche desunte dalle premesse. Sarebbe opportuno che, oltre alla parte matematica di tali sviluppi, venissero esplicitamente richiamate e lumeggiate le concezioni biologiche del Della Valle.

Il socio Andreoli presenta, quindi, per la stampa nel Rendiconto, due sue note, dal titolo: *Sull' analisi statistica di fatti economici, ed in generale di fenomeni di scambio* e *Sulla teoria delle sostituzioni generalizzate e dei loro gruppi generalizzati.*

L' Accademia approva, poi, l' inserzione nel Rendiconto di una nota della dott. Maria Di Bello, presentata dallo stesso socio corrispondente Andreoli, sopra *Un' equazione analoga a quella di Clairaut dedotta dalla geometria di Lobaceschi.*

Il segretario presenta, a nome del socio Carrelli che ne propone lo accoglimento per la stampa nel Rendiconto, una nota del prof. Giuseppe Imbò, riguardante *Ricerche sulla misura della mobilità dei piccoli ioni atmosferici mediante l' apparecchio Ebert-Mache.* L' Accademia approva.

Processo verbale dell' adunanza del dì 13 gennaio 1940 - XVIII.

Presidenza del sen. De Lorenzo. Sono presenti i soci ordinari Bakunin, Carnera, Colamonico, D' Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Pascal Ernesto, Picone, Pierantoni, ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Gallucci e Nobile.

Il segretario legge il processo verbale della tornata 9 dicembre, che è approvato, e la *Relazione sui lavori compiuti dall'Accademia durante l'anno 1938-39 (XVII)*, che verrà inserita nel Rendiconto.

Il socio PICONE presenta una nota del dott. Luigi AMERIO *Sull' inversione della trasformata di Laplace*, e ne discorre proponendone l' accoglimento per la stampa nel Rendiconto. L' Accademia unanime approva.

Il socio ANDREOLI presenta, per lo stesso periodico, una nota sua, dal titolo: *Statistica degli aggregati in una collettività e concentrazione rispetto a due caratteri*, e una nota del prof. Guido BARBA sopra le *Proprietà gruppali nelle serie di Dirichlet, serie di Dirichlet gruppali*. L' Accademia approva.

Il socio CARNERA presenta una nota dei proff. E. GUERRIERI e T. NICOLINI, *Studio delle viti del micrometro di Repsold del Cerchio meridiano di Capodimonte*, proponendone l' inserzione nel Rendiconto. L' Accademia approva.

Viene infine accolta la stampa, nel Rendiconto, della nota del dott V. CIRILLI, dal titolo: *Contributo alla conoscenza dei silicati e degli alluminati di calcio idrati*, presentata dal socio MALQUORI.

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 febbraio 1940 - XVIII.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. DE LORENZO, i soci ordinari BAKUNIN, CARNERA, CARRELLI, COLAMONICO, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, LONGO, PICONE, RICCI ed i soci corrispondenti nazionali ANDREOLI, CACCIOPPOLI, DE DOMINICIS, NOBILE e PICONE.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 13 gennaio, che è approvato.

Il presidente partecipa all' Accademia la morte, avvenuta il 25 gennaio, del socio Ernesto PASCAL, e ricorda che Egli era ancora presente alla riunione del 13 gennaio, col suo solito sorriso doloroso, reso ancor più doloroso dal presentimento, da Lui anche chiaramente espresso, della sua prossima fine, che nessuno, però, avrebbe creduta così imminente. Nonostante le sue gravi condizioni Egli non aveva voluto mancare all' adunanza, come non era mai mancato alle precedenti nel periodo di trent'anni della sua appartenenza, quale socio ordinario, all' Accademia; come non era mai mancato alle lezioni ed agli altri suoi doveri d' ufficio: perchè tutta la sua vita fu sempre dominata da un sentimento altissimo, quasi religioso, del dovere, in tutte le sue forme. La sua vita, che s'era aperta con i più lieti auspicî, giacchè a venticinque anni Egli era già professore d' università, nell'ultimo suo periodo s'era andata mano a mano offuscando sotto una nube di tristezza: dapprima per la morte, nella grande guerra, di uno dei due suoi figli; poi per quella del fratello Carlo, che aveva illustrato le lettere latine,

come Egli l'analisi matematica; quindi per aver dovuto lasciare l'insegnamento, a Lui tanto caro, quando si sentiva ancora in grado di poterlo efficacemente compiere; infine per il cruccio di non avere ancora visto il figlio Mario occupare il meritato posto che Egli desiderava e che l'Accademia gli augura. Tutto ciò aveva offuscato, ma non alterato, le sue nobili doti di uomo, di padre, di cittadino Delle sue grandi doti di maestro e di scienziato si parlerà in una prossima adunanza, nella commemorazione, che di Lui farà il socio ordinario Mauro PICONE.

Il segretario comunica la lettera del socio Mario PASCAL, che ringrazia l'Accademia per la parte presa al suo recente lutto. Indi dà la notizia dei seguenti concorsi a premio recentemente banditi dal Presidente della Società Reale di Napoli, secondo le norme in vigore: 1.°) Concorso al premio biennale accademico sul tema: « *Contributo alle ricerche sul movimento del polo* », con scadenza 31 dicembre 1940 - XIX; 2.°) Concorso al premio triennale Agostino Oglialoro TODARO, con scadenza al 31 gennaio 1941 - XIX; 3.° Concorso al premio quinquennale Gabriele e Ruggero TORELLI, con scadenza al 1.° marzo 1940 - XVIII; 4.° Concorso al premio biennale SEMENTINI, con scadenza al 1.° marzo 1940 - XVIII; 5.° Concorso al premio annuale Filippo CAVOLINI, con scadenza al 1.° marzo 1940 - XVIII.

Fra le pubblicazioni recentemente pervenute in omaggio è segnalato un gruppo di lavori pubblicati dall'Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo, offerti dal consocio PICONE. Il Presidente, a nome dell'Accademia, ringrazia.

Il segretario presenta, da parte del socio GIORDANI che ne propone la inserzione nel Rendiconto, una nota dell'ing. Mario M. JACOPETTI su *L'attacco anodico della grafite nella elettrolisi dei cloruri alcalini.* L'Accademia approva.

Il socio corrispondente ANDREOLI presenta, per il Rendiconto, una sua nota dal titolo: *Schema statistico di evoluzione e di selezione in una collettività a monoibridismo mendeliano,* e ne discorre.

Processo verbale dell' adunanza del dì 2 marzo 1940 XVIII.

Sono presenti il presidente sen. DE LORENZO, il segretario D'ERASMO, i soci ordinari BAKUNIN, CARNERA, COLAMONICO, DIAMARE, LONGO, MALQUORI, PIERANTONI ed i soci corrispondenti nazionali ANDREOLI, NOBILE e PASCAL.

Il segretario legge il processo verbale dell'adunanza 3 febbraio, che è approvato. Indi comunica la circolare del Presidente dell'Unione Matematica Italiana, relativa al secondo congresso nazionale, che avrà luogo in Bologna dal 4 al 6 aprile p. v. L'Accademia delibera di dare la sua adesione, facendosi rappresentare dai soci CARNERA, ANDREOLI e NOBILE.

Poscia il segretario informa che il 1.° marzo corrente sono scaduti i

concorsi al premio annuale « Filippo CAVOLINI », al premio biennale « SEMENTINI » e al premio quinquennale « Gabriele e Ruggero TORELLI ». Al primo hanno partecipato due concorrenti con lavori di biologia animale, al secondo un solo concorrente e al terzo pure un concorrente. Il presidente nomina le tre commissioni rispettivamente composte dai soci PIERANTONI, DIAMARE e ZIRPOLO, dai soci GIORDANI, BAKUNIN e MALQUORI, e dai soci CARNERA, ANDREOLI e PASCAL, con l'incarico di riferire nella prossima adunanza.

Il socio corrispondente ANDREOLI, ricordando lo scomparso suo maestro Ernesto PASCAL, esprime le seguenti parole: « Nella scorsa adunanza la « vivissima commozione, nel guardare il vuoto posto di fronte al mio, mi « impedì di dare il mio saluto devoto alla memoria del Maestro perduto. « Una ininterrotta consuetudine diuturna di trenta anni mi legava a Lui « come discepolo. Se l'attività dello scienziato era grandissima, egualmente « profonda era quella del maestro: e la vita universitaria napoletana ben « lo conosce. Basta ricordare le serene ed accorate parole premesse alle « sue « Lezioni d'Algebra ». Il carattere del maestro non conobbe debolezze: « la sua dirittura morale assoluta non si è mai smentita. E se qualche « volta, negli ultimi tempi, è sembrato che Egli non comprendesse i giovani « (Egli, che alla patria ha dato un figlio), questo è dovuto soltanto ad un « amaro rinchiudersi in se stesso. Mi sia pertanto concesso di portargli « questo tenue ma filiale commosso saluto ».

Lo stesso socio ANDREOLI richiama l'attenzione dei colleghi naturalisti su di una possibile schematizzazione unitaria dell'eredità Mendeliana, chiedendo se esistano osservazioni in merito. Si tratta dei caratteri multiplamente allelomorfi Siccome già per *due* caratteri allelomorfi i monoibridi si presentano con due forme distinte (quella della dominanza e recessività — tipo *Pisum* — e quella, quasi intermedia, per fusione — tipo *Jalapa* —), occorre ben caratterizzare gli alleli multipli ed il loro mutuo comportamento negli incroci. E quindi dire se e come essi si distribuiscano ordinatamente in serie lineari, cioè in gruppi-catene costituiti da caratteri ciascuno dominante rispetto ai seguenti dello stesso gruppo-catena; oppure se invece essi si distribuiscano in gruppi-ciclici, ciascuno dei quali ibridi con gli altri dello stesso gruppo col tipo *Jalapa*; dire della coordinazione o subordinazione, cioè di caratteri allelomorfi fra loro in ogni gruppo, dire del comportamento dei gruppi di essi fra di loro, e così via per gruppi di gruppi ecc. Sembra che nulla di ciò sia stato sinora nemmeno impostato, nè osservato; e tuttavia tali schemi (se sviluppati) mostrano da un lato una notevole analogia con la eredità intermedia (e certamente ad essa si possono riattaccare); dall'altro mostrano la possibilità — rispetto a caratteri mutuamente e multiplamente alleli — di formule di « struttura » ereditaria genetica del tipo di quelle chimiche. Avendo posta tale questione, il socio ANDREOLI si riserva di presentare, in una delle prossime adunanze, una comunicazione sui poliibridi da allelomorfismo multiplo.

Il socio LONGO offre in omaggio un lavoro del suo aiuto, prof. G. RODIO, dal titolo *Contributo allo studio della flora pugliese*, e ne parla. Il presidente ringrazia.

Il socio corrispondente ANDREOLI presenta una nota della dott. Maria DI BELLO, su *Inviluppi di curve piane ed equazioni di Clairaut generalizzate*, proponendone l'accoglimento nel Rendiconto. L'Accademia approva.

Processo verbale dell'adunanza del dì 6 aprile 1940 - XVIII.

Partecipano all'adunanza, presieduta dal sen. DE LORENZO, i soci ordinari BAKUNIN, BOTTAZZI, CARNERA, COLAMONICO, D'ERASMO (segretario), DIAMARE, LONGO, MALQUORI, RICCI e il socio corrispondente ANDREOLI.

Il presidente rinnova alla consocia BAKUNIN le condoglianze dell'Accademia per l'immatura perdita del nipote dott. Luigi BAKUNIN, il quale poteva ormai considerarsi spiritualmente acquisito alla Società Reale, avendo l'anno scorso presentato alla Classe di Scienze mediche e chirurgiche due interessanti lavori, che purtroppo hanno visto la luce proprio nel giorno della sua morte. La signora BAKUNIN ringrazia.

Inoltre il presidente è sicuro di interpretare il sentimento di tutti i soci dell'Accademia, inviando auguri di guarigione al padre dell'illustre consocio Francesco GIORDANI. L'Accademia unanime si associa.

Il socio MALQUORI, tanto in nome proprio che dei colleghi GIORDANI e BAKUNIN, legge la relazione sul concorso al premio biennale SEMENTINI, la quale conclude con la proposta unanime di assegnare il premio di lire mille all'unico concorrente, dott. Alessandro ROSSI, per la memoria manoscritta da lui presentata: *Sulla costituzione chimica della mioglobina*.

Il socio CARNERA dà lettura della relazione della Commissione CARNERA, ANDREOLI e PASCAL per il concorso al premio quinquennale Gabriele e Ruggero TORELLI, con la conclusione che all'unica concorrente, dott. Maria DI BELLO, non sia dato il premio, ma venga assegnato un incoraggiamento di L. 500,00 e che le 500 lire residue vadano ad aumentare il fondo del prossimo premio quinquennale.

A norma di Regolamento, atti e relazioni di questi concorsi rimarranno a disposizione dei soci nei locali della Cancelleria della Società Reale fino al prossimo deliberato dall'Accademia.

Il socio LONGO offre in omaggio una nota del prof. Emilio CHIOVENDA dal titolo: *Nuova specie di Polystachya dell' Etiopia*, e ne parla. Il presidente, a nome dei colleghi, ringrazia.

Processo verbale dell' adunanza del dì 4 maggio 1940 - XVIII.

Sono presenti il presidente sen. De Lorenzo, i soci ordinari Bakunin, Bottazzi, Carnera, Colamonico, D'Erasmo (segretario), Diamare, Longo, Malquori, Pierantoni, Ricci, Signorini ed i soci corrispondenti nazionali Andreoli, Caccioppoli, De Dominicis, Gallucci, Pascal.

Il segretario legge il processo verbale dell' adunanza 6 aprile, che è approvato. Indi presenta il nuovo volume degli Atti (I della serie 3.ª), di cui è stata recentemente ultimata la stampa, e l' indice generale comprovante l' attività scientifica dell' Accademia nei due secoli di sua esistenza, che egli, in adempimento dell' incarico affidatogli dall' assemblea, ha curato ed aggiornato. Il socio Longo è sicuro d' interpretare il sentimento dei colleghi, esprimendo al Segretario il suo plauso per tale utile pubblicazione, della quale era vivamente sentito il bisogno. Il segretario ringrazia.

Il presidente esprime le felicitazioni dell'Accademia al socio Pierantoni per la sua recente nomina a socio dell' Accademia Pontificia delle Scienze. Il socio Pierantoni ringrazia.

Si procede, quindi, a norma di Regolamento, alla votazione sulle proposte delle Commissioni incaricate di riferire sopra i concorsi al premio biennale Sementini per memorie di Chimica applicata, al premio quinquennale Gabriele e Ruggero Torelli per i giovani cultori di Matematica pura, e al premio annuale Filippo Cavolini per memorie di scienze biologiche, tutti scaduti il 1.° marzo scorso. Data lettura delle tre relazioni, che furono già depositate in Cancelleria a disposizione dei soci insieme con le memorie presentate, l' Accademia approva all' unanimità le conclusioni delle Commissioni predette, le quali propongono che il premio Sementini di lire 1000.00 venga conferito all' unico concorrente dott. Alessandro Rossi per la sua memoria manoscritta *Sulla costituzione chimica della mioglobina*; che il premio Torelli non venga conferito, ma sia dato alla concorrente dott. Maria Di Bello un incoraggiamento di L. 500,00, riserbando le altre lire 500 ad accrescere il futuro premio quinquennale Torelli; e che il premio Cavolini di lire 1000,00 sia assegnato all' autore, anonimo, della memoria manoscritta sopra *Gli organi sessuali di Eusicyonia carinata Olivi*, contrassegnata dal motto « Amor et Labor ». La scheda contenente il nome dell'autore di quest'ultima memoria sarà aperta dal Consiglio di Presidenza, a norma dell' art. 35 del Regolamento.

Il segretario presenta, per la stampa nel Rendiconto, tre note inviate dal socio corrispondente straniero Wacław Sierpinski: *Sur les éspaces (V) séparables universels, Exemple effectif d' une famille de* $2^{\aleph_1}$ *ensembles linéaires croissants,* e *Sur l' existence d' un ensemble indénombrable à propriété* λ'.

Il socio corrispondente Andreoli presenta una nota del prof. Giuseppe

Palomba, dal titolo: *Elementi matematici per l' economia corporativa. (Il problema di « minimo » posto dalle Corporazioni)*, e ne discorre, proponendone l'inserzione nel Rendiconto. L' Accademia unanime approva.

Il socio Carnera presenta, per lo stesso periodico, una nota sua e del dott. Paolo Vocca sopra *Le variazioni di latitudine osservate nel 1939 dalle Stazioni internazionali.*

Il socio Longo offre in omaggio la *Relazione per l' anno 1939 sulla Stazione sperimentale per le piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli*, e ne parla. Il Presidente, a nome dei soci, ringrazia.

Processo verbale dell' adunanza del dì 1.° giugno 1940 - XVIII.

Assistono all'adunanza, presieduta dal sen. De Lorenzo, i soci ordinari Armellini, Bakunin, Carnera, Colamonico, D' Erasmo (segretario), Diamare, Giordani, Longo, Malquori, Picone, Pierantoni, Ricci, e i soci corrispondenti nazionali Andreoli, De Dominicis, Focaccia.

Letto ed approvato il processo verbale della tornata precedente, il presidente si alza e dice, che nell' ora in cui l' Italia si accinge, nel nome della Maestà del Re e Imperatore ed agli ordini del Duce, a spezzare le ultime catene, che ancora ne vincolano la vita, ed a conquistare così la completa indipendenza nazionale, egli interpreta il sentimento dei soci, esprimendo la fede sicura nel raggiungimento della fulgida meta, grazie al vigore inestinguibile delle *italae vires*, sempre vive attraverso i millenni, per le quali l' Italia è la degna figlia di Roma. Con vivissimi applausi l' Accademia si associa.

Il segretario comunica che il Consiglio di Presidenza della Società Reale, riunitosi per l'apertura della scheda contrassegnata dal motto « Amor et labor », ha proclamato vincitore del concorso al premio annuale Filippo Cavolini scaduto il 1.° marzo 1940 - XVIII, il dott. prof. Arturo Palombi, autore della memoria manoscritta sopra « Gli organi sessuali di *Eusicyonia carinata* Olivi ».

Il socio Ricci presenta due note del prof. Franco Jossa: la prima dal titolo: *Risoluzione progressiva di un sistema di equazioni lineari. Analogia con un problema meccanico*; la seconda riguardante il *Calcolo di travi munite di appoggi elastici di notevole estensione*, e ne discorre, proponendo l' accoglimento di entrambe nel Rendiconto. L' Accademia approva.

Il socio D' Erasmo presenta, anche a nome del socio De Lorenzo, una nota del dott. Giovanni Flores, *Appunti geologici sulla grotta di Pertosa*, concludendo con la proposta di inserzione nel Rendiconto. L' Accademia unanime approva.

Alle ore 11,30' il presidente dichiara chiusa l' adunanza pubblica, ed

invita, secondo l'ordine del giorno, a restare riuniti i soli soci ordinari per l'applicazione degli articoli 12 e 13 dello Statuto.

L'Accademia a voti unanimi delibera di proporre all'Eccellenza il Ministro dell'Educazione Nazionale la nomina, al posto vacante di socio corrispondente straniero nella sezione di scienze matematiche, del prof. Ignacio Manuel AZEVEDO DO AMARAL, ordinario di geometria analitica e calcolo infinitesimale nella Scuola nazionale d'Ingegneria del Brasile, membro del Consiglio universitario delle Università brasiliane e presidente dell'Accademia brasiliana delle scienze.

RELAZIONE DELLA COMMISSIONE GIUDICATRICE DEL CONCORSO AL PREMIO ANNUALE « FILIPPO CAVOLINI »

La Commissione, composta dai soci U. PIERANTONI presidente, V. DIAMARE e G. ZIRPOLO componenti, si è riunita il giorno 10 aprile 1940 - XVIII nei locali dell'Accademia per esaminare i lavori presentati.

Risulta che le memorie presentate sono state due: una, a stampa, del dott. Vincenzo GIORDANO, dal titolo: « *Le onde corte ed il sistema nervoso* » e l'altra, anonima, dattilografata, contrassegnata dal motto « Amor et labor » dal titolo: « Gli organi sessuali di *Eusicyonia carinata* Olivi ».

Il primo lavoro rappresenta una ricerca originale sul modo di comportarsi del sistema nervoso e specialmente del bulbo in conseguenza delle applicazioni sia sugli arti sia in applicazione transcefalica. L'autore fa conoscere particolari lesioni che implicano da una parte il sistema vascolare capillare, d'altra parte il comportamento del liquido cefalo-rachidiano in corrispondenza del bulbo dei corpi coroidei. A parte le lesioni riscontrate nelle cellule nervose, offre interesse la constatazione specialmente della esistenza di zolle situate sia in prossimità delle cellule, quindi dei nuclei bulbari, ma sopratutto zolle più o meno estese ematossilinofile e fucsinofile situate in corrispondenza delle piramidi, le quali somigliano, ma nel contempo diversificano da quelle ritenute in particolare alterazione del sistema nervoso umano. Questo lavoro richiama quindi l'attenzione sull'azione deleteria che possono avere le onde corte sul circolo e anche sulla sostanza bianca, sulla sostanza grigia e sul liquor.

Nel secondo lavoro l'autore dà una dettagliata descrizione degli organi sessuali della *Eusicyonia carinata*, trattando dei caratteri morfologici e istologici tanto per gli organi sessuali interni che per quelli esterni, dei quali ultimi tratta anche lo sviluppo.

Capitolo particolarmente originale è quello che tratta dell'accoppiamento e della funzione delle glandole della fluidificazione e della deposizione e fecondazione delle uova, venendo in esso chiarito un capitolo particolarmente oscuro della biologia sessuale di questi animali.

Questo lavoro costituisce una grossa memoria, corredata di quattro tavole, in parte a colori, e di numerose figure da inserire nel testo.

La Commissione ritiene, che entrambi i lavori sono pregevoli: l'uno perchè si occupa di ricerche di istofisiologia in un campo pressochè inesplorato, con un contributo originale di fatti interessanti e che hanno applicazione nel campo pratico; l'altro perchè è una memoria ricca di fatti nuovi, provati anche sperimentalmente e perciò con metodi moderni.

La Commissione, considerata l'indole del premio e sopratutto il fatto che il secondo lavoro appare più corrispondente al bando del Concorso, che parla di memorie riguardanti le scienze biologiche coltivate dal Cavolini, pur ritenendo importante ed interessante ed elogiando il contributo portato dal dott. V. Giordano con la sua memoria dal titolo: « *Le onde corte ed il sistema nervoso* », per quanto sopra è esposto propone unanime che il premio venga assegnato alla memoria dal titolo: « Gli organi sessuali di *Eusicyonia carinata* », contrassegnata dal motto « Amor et labor » [1]).

La Commissione

U. Pierantoni

V. Diamare

G. Zirpolo

---

[1]) Il Consiglio di Presidenza della Società Reale di Napoli. riunitosi per l'apertura della scheda contrassegnata dal motto « *Amor et labor* », proclamò vincitore del concorso al premio annuale Filippo Cavolini, scaduto il dì 1.° marzo 1940 - XVIII, il dott. prof. Arturo Palombi (v. processo verbale dell'adunanza del dì 1.° giugno 1940 - XVIII, in questo Rendiconto).

Relazione della Commissione giudicatrice del terzo concorso al premio quinquennale Gabriele e Ruggero Torelli

Al terzo concorso al premio G. e R. Torelli, bandito dalla Società Reale di Napoli, tramite la nostra Accademia, si è presentato un solo concorrente: la dott. Maria Di Bello.

La concorrente è nelle condizioni formali per poter partecipare ed aspirare al premio; la Commissione deve però rilevare che la carriera scolastica, svoltasi con tono nettamente diverso nei due bienni (nel primo andamento mediocre, con ripresa e graduale elevazione nel secondo, e costante miglioramento dal primo al quarto anno, conclusesi con la laurea raggiunta col massimo dei voti e la lode), non può considerarsi tal quale si sarebbe dovuto attendere per chi aspiri ad un premio destinato proprio a coronare una carriera scolastica brillante ed aperto a tutti gli studenti delle Università italiane.

Le due pubblicazioni che la concorrente presenta sono in sostanza collegate fra di loro. La prima corrisponde all'interpretazione analitica di un fatto geometrico: costituito, questo, dalla considerazione di cerchi rappresentanti rette lobacewskiane, e dalla conseguente logica formazione di una equazione differenziale analoga a quella del Clairaut. La seconda nota, di sviluppo della prima, estende questo risultato in due distinte forme, che poi si fondono in una sola quasi evidente. Lo sviluppo delle due note è condotto semplicemente, aderendo in prevalenza alla parte formale delle equazioni differenziali. Il risultato interessante sarebbe stato brillante se ottenuto con il ravvicinamento fra gruppo di movimenti euclidei ed un particolare gruppo di ∞^3 affinità circolari, seguendo i concetti di S. Lie.

Riassumendo, la Commissione, valutata la carriera universitaria, l'esame di laurea, e le due pubblicazioni, ritiene che la concorrente, pur non potendo essere presa in considerazione ai fini dell'assegnazione del premio, meriti tuttavia un riconoscimento per l'opera sua e particolarmente dell'ultimo anno, e pertanto si onora di proporre:

1) che alla concorrente dott. Maria Di Bello abbia ad essere assegnato un premio, a titolo di incoraggiamento, dell'ammontare di L. 500,00 (lire cinquecento);

2) che sia riservata la somma ulteriormente disponibile per il premio del prossimo quinquennio.

La Commissione, grata all'Accademia della fiducia accordatale conferendole il mandato del presente giudizio, ringrazia sentitamente.

Napoli, li 27 marzo 1940 - XVIII.

La Commissione

Luigi Carnera

Giulio Andreoli

Mario Pascal

Relazione della Commissione giudicatrice del concorso al premio biennale « Sementini »

La Commissione, composta dai soci ordinari prof. M. Bakunin, Ecc. F. Giordani, prof. G. Malquori, si onora di riferire all'Accademia quanto segue:

Ha partecipato al concorso un sol candidato: il prof. Alessandro Rossi, aiuto presso l'Istituto di Chimica biologica della R. Università di Napoli.

Egli presenta una nota dattilografata dal titolo: *Sulla costituzione chimica della mioglobina*, nella quale è riferito su di un assieme di indagini espletate dall'autore al fine di chiarire la diversità chimica fra l'emoglobina dei muscoli e l'emoglobina del sangue.

L'emoglobina dei muscoli o mioglobina, recentemente ottenuta allo stato cristallino da Theorell (1932), si è dimostrata diversa da quella del sangue, sia per alcuni caratteri chimico-fisici (peso molecolare, spettro d'assorbimento, caratteri cristallografici), sia per le sue proprietà biologiche, fra le quali assai importante la maggiore affinità per l'ossigeno.

Poichè la mioglobina dà per scissione un emo che ha le stesse proprietà dell'emo della emoglobina, si è ammesso che le due proteine debbano differire per la natura del gruppo proteico.

Il Rossi ha abbordato il problema della costituzione chimica di questo gruppo. Egli ha lavorato con mioglobina cristallizzata ottenuta dal cuore di cavallo: dopo aver determinato il contenuto in *Fe* di detta sostanza, l'ha sottoposta all'idrolisi acida ed ha determinato le diverse frazioni azotate dell'idrolizzato secondo il metodo di Van Slyke da lui opportunamente modificato onde renderlo atto all'analisi di quantità assai piccole di proteine.

Il risultato delle sue indagini dimostra che effettivamente il costituente proteico della mioglobina è differente da quello dell'emoglobina: le differenze più caratteristiche si riferiscono al contenuto in arginina, lisina e cistina, il cui contenuto % è rispettivamente dell'1,6 %, 9 %, 12 % nella mioglobina, del 3,2 %, 7,5 % e 8,1 % nella emoglobina.

Queste ricerche, oltre a dare la prima prova sperimentale della diversità chimica fra le due proteine respiratorie, interessano anche la spiegazione di un'osservazione clinica assai importante fatta in questi ultimi anni, e cioè che nella atrofia muscolare progressiva compare nell'urina un pigmento diverso da quello che compare in casi di esaltata emolisi.

La Commissione, considerato il lodevole contributo portato dal lavoro del prof. Rossi ad un argomento di attualità e di alto interesse anche ai fini della biochimica applicata, è pertanto unanime nel proporre all'Accademia che ad esso venga assegnato il premio « Sementini ».

La Commissione

F. Giordani

M. Bakunin

G. Malquori

Opere ed Opuscoli ricevuti in dono dagli autori o editori dal 29 ottobre 1939 al 28 ottobre 1940.

L' inserzione nel presente elenco valga come ringraziamento ai donatori.

1. Amodeo F., Curve normali piane di gonalità k. — Catania, 1940.
2. » » I numeri ρ_α nel nuovo metodo per la geometria delle serie lineari delle curve algebriche. — Napoli, 1940.
3. » » Nuovo metodo per la geometria delle serie lineari delle curve algebriche. — Napoli, 1939.
4. » » Origine e sviluppo della Geometria Proiettiva. — Napoli, 1939.
5. Annuario del R. Istituto Superiore Navale, V. Amm. R. Leonardi Cattolica. — Napoli, 1937 38.
6. Arlman E. J., Complexvarming door protonenovergang. — Leiden, 1939.
7. Armellini G., Il contributo italiano al progresso dell'astronomia, negli ultimi cento anni. — Roma, 1938.
8. Atti del X Congresso Internazionale di Chimica. (Roma, 15-21 maggio 1938). — Roma, 1938.
9. Badellino M., Sul calcolo delle funzioni di Bessel. — Roma, 1939.
10. Barile B., Una particolare soluzione dell'equazione del calore. — Roma, 1939.
11. Bencivenga U., Geometria e trigonometria iperboliche e fondamenti d' una geometria a metri variabili. — Roma, 1940.
12. Boni A., Calcolo per successive approssimazioni del campo elettrostatico di un sistema cilindrico. — Roma, 1939.
13. Bruni B., Elementi per una razionale diffusione dei vitigni per uve da tavola. — Ancona, 1940.
14. Calendario del R. Osservatorio e Museo astronomico di Roma (Monte Mario), anno 1940. — Bologna, 1940.
15. Caligo D., Un criterio sufficiente di stabilità per le soluzioni dei sistemi di equazioni integrali lineari e sue applicazioni. — Roma, 1940.
16. Cappello L., Contribuzione allo studio dell'anatomia del Luppolo (*Humulus lupulus* L.). — Napoli, 1939.
17. Celeri F., Sul meccanismo dei contatti striscianti nei sistemi per induzione e rotazione unipolare. — Padova, 1939.
18. Cesari L., Proprietà asintotiche delle equazioni differenziali lineari ordinarie. — Roma, 1940.
19. » » Sulla stabilità delle soluzioni dei sistemi di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici. — Roma, 1940.

20. Cesari L., Sulla stabilità delle soluzioni delle equazioni differenziali lineari. — Roma, 1939.
21. Chiovenda E., Nuova specie di *Polystachya* Hook. (Orchidaceae. sect. Caulescentes) dell' Etiopia. — Napoli, 1940.
22. Cimino M., Determinazione della latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Roma su Monte Mario. — Roma, 1940.
23. » » Nuova orbita del pianeta 747 Winchester e perturbazioni speciali di Giove dal 1929 al 1940. — Roma, 1940.
24. » » Orbita del Pianeta 1485 Isa (1938 OB). — Roma, 1940.
25. Coenen P. A., Spin-triëders Jacob'sche spinoren als spin-analogn der polaire bolfuncties. — Amsterdam, 1939.
26. Colamonico G., La più antica Carta regionale della Puglia. — Bari, 1939.
27. Conforto F., Sopra un complemento all' equazione dei tre momenti per una trave continua inflessa e sollecitata assialmente. — Roma, 1939.
28. Consiglio Nazionale delle Ricerche, Periodici italiani scientifici, tecnici e di cultura generale — 3 voll. — 5.ª ediz. — Roma, 1939.
29. De Jong C., On Indo-Malayan pterophyllinae. — Leiden, 1938.
30. De Jongh Ph., On the symbiosis of Ardisia Crispa (thunb.) A. DC. — Amsterdam, 1938.
31. D' Erasmo G., Il Vesuvio e i Campi Flegrei alla fine del Settecento nelle descrizioni di Lazzaro Spallanzani e di altri contemporanei. — Pavia, 1939.
32. De Zeeuw J., On Water Exosmosis in *Chaetomorpha Linum* (Müll.) Kütz. — Gouda, 1939.
33. Dietschy H., Die Amerikanischen Keulen und Holzschwerter in ihrer Beziehung zur Kulturgeschichte der neuen Welt. — Leiden, 1939.
34. Dijksman A. J., Grenzen van explosiegebieden. — Leiden, 1939.
35. Doetsch G., Über die Abhandlung von M. Picone: « Formule risolutive e condizioni di compatibilità per alcuni problemi di propagazione ». — Roma, 1939.
36. Dronkers J. J., Over stratifieerbare congruenties. — Amsterdam, 1939.
37. Faedo S., Sulla singolarità degli integrali dei sistemi di equazioni differenziali lineari in un punto singolare per i coefficienti. — Roma, 1939.
38. Franchino A., Il Lambrusco. — Roma, 1939.
39. » » L' Albana e il Sangiovese. — Roma, 1939.
40. Fresa A., Che cosa si vede su Marte. — Firenze, 1940.
41. Frielink J. G., De reactie van schroeter. — Leiden, 1939.
42. Grioli G., Sollecitazioni di una struttura elicoidale incastrata agli estremi. — Roma, 1939.
43. Gröbner W., Condotta forzata scavata in roccia. — Roma, 1939.
44. » » Sistemi di polinomi ortogonali soddisfacenti a date condizioni. — Roma, 1939.
45. » » Determinazione delle temperature e del flusso di calore nei solai radianti. — Roma, 1940.

46. Hanson E. A., Some properties of the Chlorophyll in Relation to its biological function. — Gouda, 1939.

47. Hoek H., Algemeene theorie der optische activiteit van isotrope media. — Leiden, 1939.

48. Karstens W. K. H., Anthocyanin and Anthocyanin Formation in seedlings of *Fagopyrum esculentum* Moench. — Gouda, 1939.

49. Keesom A. P., Enkele thermische eigenschappen van vloeibaar en vast Helium. — Leiden, 1938.

50. Krall G., Contributo ad alcune notevoli esperienze di idraulica. — Roma, 1939.

51. » » Problemi sulla regolazione delle macchine idrauliche concatenate ad una rete d' alimentazione. — Roma, 1939.

52. Krall G. e Gröbner W., Complementi analitici e numerici. — Roma, 1939.

53. Kuenen D. J., Systematical and Physiological notes on the brine shrimp, Artemia. — Haarlem, 1939.

54. L' Istituto di agronomia e coltivazioni erbacee della facoltà Agraria di Portici nell' anno accademico ed agrario 1938-39 (Attività didattica e sperimentale). — Portici, 1940.

55. Longo B., Relazione per l'anno 1939 sulla Stazione Sperimentale per le piante officinali annessa al R. Orto Botanico di Napoli. — Napoli, 1940.

56. Mangeron D., L' applicazione del metodo di Picone, della trasformata di Laplace ad intervallo d' integrazione finito, alla teoria delle equazioni a derivate parziali d' ordine qualunque. — Roma, 1939.

57. » » Sulle equazioni lineari a derivate parziali di tipo « composito » secondo Hadamard. — Roma, 1939.

58. Matthijs C. J., De thermo-electrische eigenschappen van enkele metalen bij zeer lage temperaturen. — Amsterdam, 1939.

59. Mastrolilli De Angelis A., La meccanica del cavallo da tiro nei riflessi dell' autarchia dei trasporti e nei riflessi delle caratteristiche costruttive delle strade. — Milano, 1940.

60. Milazzo G. e Tommasi G. B., Sulle perdite di luce negli spettrografi per fessure molto piccole. — Roma, 1940.

61. Minelli C., Metodo di calcolo per travi Vierendeel con grande numero di trasversi. — Roma, 1939.

62. Minelli C. e Gröbner W., Indagini sulle vibrazioni dei velivoli. — Roma, 1939.

63. Minelli C. e Viola T., Sulla torsione dei prismi cavi rettangolari a parete sottile. — Roma, 1939.

64. Miranda C., Su un problema di Minkowski. — Roma, 1939.

65. » » Su un problema di propagazione. — Roma, 1939.

66. Overbeek G. A., Het Zuurstofverbruik van zoogdiererythrocyten onder invloed van Leverextract. — Gouda, 1939.

67. Pascal E., Sull' integrazione meccanica delle equazioni differenziali, e in particolare di quella lineare di 2.° ordine ausiliaria dell' altra non lineare

che è fondamentale per la fisica atomica (memoria donata all'Accademia dal figlio prof. Mario Pascal). — Roma, 1940.

68. Picone M. e Miranda C., La formela di Green per i problemi con arbitraria derivata obliqua. — Roma, 1939.
69. Picone M., L'estremo inferiore di un certo funzionale. — Roma, 1939.
70. » » Nuovi metodi d'indagine per la teoria delle equazioni lineari a derivate parziali. — Roma, 1939.
71. » » Nuovi metodi per il calcolo delle soluzioni delle equazioni a derivate parziali della fisica matematica. — Roma, 1940.
72. » » Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti. — Roma, 1940.
73. » » Problemi riducibili d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali. — Roma, 1940.
74. » » Sopra un problema di Calcolo funzionale. — Roma, 1939.
75. Plaut L., Photographische photometrie der veranderlijke sterren *CV Carinae en W W Draconis*. — Leiden, 1939.
76. Prosperi V., I vini pregiati dei Castelli Romani. — Roma, 1939.
77. Raasveldt H. C., De Geologie van het gebied tusschen de Brembo en de Serio Noordelijk van de Bergkam Monte Menna-Pizzo Arera. — Leiden, 1939.
78. Regio Politecnico di Milano, Gaudenzio Fantoli. — Milano, 1940.
79. Rodio G., Contributo allo studio della flora pugliese. — Napoli, 1940.
80. Rosenthal S., Invloed van organische niet-electrolyten op zeepcoacervaten. — Leiden, 1939.
81. Schuit G. C. A., De oxydatie van butaan. — Wageningen, 1938.
82. Smolders F. M. M., On the influence of the anterior lobe of the hypophysis upon the growth of explanted tissues. — Utrecht, 1938.
83. Staverman A. J., Cohaesie-kracten in vloeibare mengsels. — Amsterdam, 1938.
84. Teunissen-van Zijp L., Invloed van anorganische en organische ionen op de lading van biokolloiden in het bijzonder van eiwitten. — Amsterdam, 1938.
85. Tolotti C., Applicazione di un nuovo metodo di M. Picone alla integrazione delle equazioni dell'elasticità in un parallelepipedo rettangolo. — Roma, 1940.
86. » » La formula di Green per i problemi al contorno con derivata obliqua in spazi curvi quali si vogliano. — Roma, 1939.
87. » » Sul calcolo delle molle Belleville o discoidali. — Roma, 1940.
88. » » Sul problema di Cauchy. — Roma, 1939.
89. Vaas K. F., Studies on the Growth of *Bacillus megatherium* de Bary. — Gouda, 1938.
90. van Braam Houckgeest J. P. W. A., Oplossend en dissocieerend vermogen van gechloreerde Koolwaterstoffen. — Wageningen, 1939.

91. van den Berg G. J., De electrische weerstand van zuivere metalen bij lage en zeer lage temperaturen. — Amsterdam, 1938.

92. van der Weijden P. W. M., Verband tusschen smaak en structuur van eenige derivaten van meta-nitraniline. — Leiden, 1939.

93. van Eck P. J., Farbenschen und zapfenfunktion bei der singdrossel. *Turdus E. ericetorum* Turton. — Haarlem, 1939.

94. Verbrugh A. J., Uitdovingsgrenzen van stationnaire vlammen en ternaire explosiegrenzen. — Leiden, 1939.

95. Viola T. Dimostrazione della convergenza di un procedimento di M. Picone per il calcolo degli autovalori. — Roma, 1939.

96. » » Nuovi metodi di calcolo per la verifica di un' ala a una speciale forma di instabilità dell' equilibrio elastico. — Roma, 1940.

97. » » Procedimenti costruttivi per le estremanti di un funzionale. — Roma, 1939.

98. » » Sulle equazioni algebriche a coefficienti reali, le cui radici hanno parti reali esterne o non interne a un determinato intervallo. — Roma, 1939.

99. » » Sulle estremanti di un integrale in forma ordinaria, dipendente da funzioni a derivate prime equiuniformemente lipschitziane. — Roma, 1939.

100. » » Sulla stabilità degli integrali delle equazioni differenziali lineari, omogenee e a coefficienti costanti. — Roma, 1940.

101. Vogelesang C., Gemethyleerde semicarbaziden. — Leiden, 1938.

102. Witte C. H. D., Derivaten van 1. chloor -- 2. nitro — 4. cyaanbenzol. — Leiden, 1939.

INDICE DEL VOLUME

ERRATA CORRIGE

Alla pag. 49 il rigo 10[mo] dal basso leggasi: *dei rapporti di scalettamento e dei quadrati dei rapporti delle pressioni di montaggio: i*